mod 128 について

$N^9$ を27で割ったあまりを調べました。

$27 = 3 \times 3 \times 3 \rightarrow 3-1=2 \quad 2 \times 3 \times 3 = 18$

$18 = 9 + 9$

| $N^9$ | あまり | $N^9$ | あまり | $N^9$ | あまり |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 11 | 26 | 21 | 0 |
| 2 | 26 | 12 | 0 | 22 | 1 |
| 3 | 0 | 13 | 1 | 23 | 26 |
| 4 | 1 | 14 | 26 | 24 | 0 |
| 5 | 26 | 15 | 0 | 25 | 1 |
| 6 | 0 | 16 | 1 | 26 | 26 |
| 7 | 1 | 17 | 26 | 27 | 0 |
| 8 | 26 | 18 | 0 | 28 | 1 |
| 9 | 0 | 19 | 1 | 29 | 26 |
| 10 | 1 | 20 | 26 | 30 | 0 |

17より後は補完型を利用した数値です。



$26 \times 26 = 676$

$676 \div 27 = 25.03703703$

小数部を27倍すると

$0.99999981 \fallingdotseq 1$

$N^{18} \equiv 1 \pmod{27}$

$N^{18}$が27で割り切れない場合

不完全な $N^0$ のパターンになりました。

mod $2^n$ の場合について調べてみました。

CASIO FX-890P を使いました。

```
100  CLEAR
110  INPUT A
120  B = 128
130  C = A MOD B
140  PRINT C
150  GOTO 100
```

数値を変化させる。

128 . 16
64 . 8
32 . 4



$N^8$ を調べました。

33, 97, 65, 1 があらわれました。

$97 \rightarrow 65 \rightarrow 1$
$33 \nearrow$

$97^2 \equiv 65 \pmod{128}$

$33^2 \equiv 65 \pmod{128}$

$65^2 \equiv 1 \pmod{128}$

$97 + 33 = 130$

$65 \times 2 = 130$

$65 = 64 + 1$

$33 = 32 + 1$

を読みとることができます。



| $N^4$ の場合 | | $N^4$ | $N^4$ | $N^4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ( 1 ) | 31 | 33 | 63 |
| 3 | ( 81 ) | 29 | 35 | 61 |
| 5 | ( 113 ) | 27 | 37 | 59 |
| 7 | ( 97 ) | 25 | 39 | 57 |
| 9 | ( 33 ) | 23 | 41 | 55 |
| 11 | ( 49 ) | 21 | 43 | 53 |
| 13 | ( 17 ) | 19 | 45 | 51 |
| 15 | ( 65 ) | 17 | 47 | 49 |

$$
\begin{aligned}
65 \times 2 &= 130 \\
&= 97 + 33 \\
&= 113 + 17 \\
&= 81 + 49
\end{aligned}
$$

$17 = 16 + 1$

No.

Date



$$\begin{tikzcd}
N^4 & N^8 & N^{16} & N^{32} \\
113 \arrow[dr] & & & \\
& 97 \arrow[ddr] & & \\
49 \arrow[ur] & & & \\
& & 65 \arrow[r] & 1 \\
17 \arrow[dr] & & & \\
& 33 \arrow[uur] & & \\
81 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

$113^2 \equiv 97 \pmod{128}$

$49^2 \equiv 97 \pmod{128}$

$17^2 \equiv 33 \pmod{128}$

$81^2 \equiv 33 \pmod{128}$



mod 128 の場合 $N^{32}$で不完全な$N^0$のパターンになることがわかります。

$128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$2 - 1 = 1$

$1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

くいちがいがあらわれました。

| | | | |
|---|---|---|---|
| mod 128 | $\rightarrow$ | $N^{32}$ | $32 = 2^5$ |
| mod 64 | $\rightarrow$ | $N^{16}$ | $16 = 2^4$ |
| mod 32 | $\rightarrow$ | $N^8$ | $8 = 2^3$ |
| mod 16 | $\rightarrow$ | $N^4$ | $4 = 2^2$ |
| mod 8 | $\rightarrow$ | $N^4$ | $2 = 2^2$ |
| mod 4 | $\rightarrow$ | $N^2$ | $2 = 2^1$ |
| mod 2 | $\rightarrow$ | $N^1$ | $1 = 2^0$ |

となりました。



十進法で

$1/487$ と $1/487^2$ の循環節の長さ

がどちらも486桁となりますが、

同様の例外を

$N^2 \equiv 1 \pmod{8}$

$N^2 \equiv 1 \pmod{16}$

割り切れない場合

で確かめることができました。

武田 利一 様

2012.6.24

林 邦英

ごめいわくをおかけしました。もうしわけありません。まちがいの原因は、Nの場合、Nが奇数の場合、Nが偶数の場合を分けて整理しなかったことにあります。

mod 128 についてのP.6以降を書き直しました。

mod 128 が $N^0$ になる最小の乗数が、$2^{7-1} = 64$ ではなく $N^{32}$ の場合であることがわかり、mod $2^n$ の場合を調べました。Nが偶数の場合は割り切れる場合なので、Nが奇数の場合が大切だと思います。Nの場合は mod 2 です。$N^2$ の場合は mod 4 だけでなく mod 8 の場合でも成立します。$N^4$ 以降は規則的です。なぜ $N^2$ の時にこうなるのか、また他の事例があるのかどうかについてはわかりません。循環小数を調べた時、私は定数倍の規則性と呼んでいますが、共通す

る例外を確かめることができたことが今回の観察の成果だと考えています。

数学教育 7月号（明治図書）で「数学レポートに挑戦しよう！」をとりあげています。関心をもちました。

北海道の渡邉 勝さんより『整数のK乗数の一位数に見られる「回文構造」「補数構造」の証明』の論文をいただきました。

mod 128 の場合 $N^{32}$ で不完全な $N^0$ のパターンになることがわかります。（Nが奇数の時に $N^0$ になる。）

$128 = 2^7$

$2-1 = 1$

$1 \times 2^6 = 64 \rightarrow N^{64}$

くいちがいがあらわれました。

| | | |
|---|---|---|
| mod 128 | $\rightarrow N^{32}$ | $32 = 2^5$ |
| mod 64 | $\rightarrow N^{16}$ | $16 = 2^4$ |
| mod 32 | $\rightarrow N^{8}$ | $8 = 2^3$ |
| mod 16 | $\rightarrow N^{4}$ | $4 = 2^2$ |
| mod 8 | $\rightarrow N^{4}$ | $4 = 2^2$ |
| mod 4 | $\rightarrow N^{2}$ | $2 = 2^1$ |
| mod 2 | $\rightarrow N^{1}$ | $1 = 2^0$ |

の場合が不完全な $N^0$ のパターンになる最小のNの乗数です。



Nの場合, Nが奇数の場合, Nが偶数の場合に分けて考えてみました。

| | Nが奇数で $N^0$ のパターンになる最小の乗数 (ア) | Nが偶数で割り切れる最小の乗数 (イ) | Nの場合 (ア),(イ)以上となる最小の $2^n$ 乗数 |
|---|---|---|---|
| mod 128 | 32 | 7 | 32 |
| mod 64 | 16 | 6 | 16 |
| mod 32 | 8 | 5 | 8 |
| mod 16 | 4 | 4 | 4 |
| mod 8 | 2 | 3 | 4 |
| mod 4 | 2 | 2 | 2 |
| mod 2 | 1 | 1 | 1 |

mod 8 の場合が気になります。



Nが奇数の場合 $N^2-1$ を 4で割りました。

| $N^2$ | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $1-1=0$ | | |
| 9 | $9-1=8$ | $8 \div 4 = 2$ | $= 2 \times 1$ |
| 25 | $25-1=24$ | $24 \div 4 = 6$ | $= 2 \times 3$ |
| 49 | $49-1=48$ | $48 \div 4 = 12$ | $= 2 \times 6$ |
| 81 | $81-1=80$ | $80 \div 4 = 20$ | $= 2 \times 10$ |

商は 2の倍数なので, 8でも割り切れることがわかります。



$N^1 \rightarrow 2^1$

$N^2 \rightarrow 2^2$ , $2^3$

$N^4 \rightarrow 2^4$

奇数の場合, mod 4, mod 8 の場合, $N^2$ の時が $N^0$ のパターンになる最小の乗数になります。

十進法で

$1/3$ と $1/3^2$ の循環節の長さは

どちらも 1 桁

$1/487$ と $1/487^2$ の循環節の長さは

どちらも 486 桁

となります。

(一般形は, $1/7 \rightarrow l=6$ $1/7^2 \rightarrow l=6 \times 7=42$ )

同様の例外を確かめることができました。