1

武田 利一 様

2012.1.22

林 邦英

本年もよろしくお願いします。

ロイターのサイトの1月20日の記事に、(イギリスでの)「親を困らせる質問」が、10問あります。7番目に「割り算のひっ算のやり方は」がありました。割り算について東京、大阪、愛知の小学校の先生よりお手紙をいただいております。参考にしました。ありがとうございます。

① 等分除

↓

② 単位　数学入門(上)遠山 啓著

↓　P.24～(P.25単位で測る)

③ 包含除

このように考えてみましたが、よろしいですか。御意見をお知らせ下さい。

ハレー法（3次収束）について、少し整理してみました。

中日新聞の1月21日の「あいち賢人」のコラムで、鷲津久一郎（1921－1981）さんが紹介されました。「有限要素法研究の第一人者」。一宮市出身に関心をもちました。二宮市三さんにハレー法を教えていただいたのは、平成14年でした。10年前のことを思いかえしています。

2次収束，3次収束の基準となるのは，$\sqrt{2}$の近似分数の表だと考えています。

2→4→8→16→　（2次収束）

3→9→27→　（3次収束）

$\sqrt{2}$の近似分数は、ヘロン式反復法の第3分数数列とボンベリ式連分数とユークリッド式連分数が一致する特別な場合で、基準になります。

$X^{\frac{1}{N}}$の場合の基準は、（Xは1の近く）

$$\frac{(N+1)\cdot X + (N-1)}{(N-1)\cdot X + (N+1)}$$

の式だと考えています。
　テイラー展開（級数展開）にはハレー法の分数関数近似（反比例）は出てきません。考え方がちがうからです。多様な考え方を生み出した当時のイギリスの強さは何なのかと考えさせられます。

No.
Date

割り算について

割り算の本質は何回引くことができるのかにあります。計算量を少くするために、かけ算と引き算を組み合わせて行います。

① 77885 ÷ 37 =

はじめに 37の倍数の表を作ります。倍数の表（かけ算の表）はたし算によって作ることができます。

計算問題で割り算を問題にすると「何がたてられるか」の方に目がいってしまいがちです。筆算による割り算の構造をテーマにしたいからです。「位どり」と計算のと中の「あまり」が大切な視点だと思います。

37	
×0	0
×1	37
×2	74
×3	111
×4	148
×5	185
×6	222
×7	259
×8	296
×9	333

```
        2 1 0 5
37 ) 7 7 8 8 5
   - 7 4 0 0 0   (37×2×1000)
       3 8 8 5
     - 3 7 0 0   (37×1×100)
         1 8 5
       -   0 0   (37×0×10)
         1 8 5
       - 1 8 5   (37×5×1)
             0
```

2000
100
00
+ 5

$2 \times 1000 + 1 \times 100 + 0 \times 10 + 5 \times 1 = 2105$

② 1 ÷ 37 =

37の倍数の表を使います。

```
          0. 0 2 7
 37 ) 1
     -0
      1
×10   1 0
    - 0
      1 0
×10   1 0 0
    -   7 4
        2 6
×10     2 6 0
      - 2 5 9
            1
```

37×27 = 999 ☆

999 = 1000 − 1

☆を変形すると？

あまりに1がでると計算は始めにもどります。1÷37は027をくり返します。

$1 \div 37 = 0.\dot{0}2\dot{7}$

0.027 × 1000 ÷ 999 = 0.027027027027

0.027 × 1000 ÷ 999 × 77885 =

（12桁の電卓を使って）　2104.99999945

計算の順序を変えると、

0.027 × 1000 × 77885 ÷ 999 = 2105

0.027 は 0
0.0
0.02
+ 0.007
0.027

$\frac{0}{1} + \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{7}{1000}$

$= 0 \times \frac{1}{1} + 0 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{100} + 7 \times \frac{1}{1000}$

③ $1 \div 37 =$ （×6 とすると）

```
      0.0055
37 ) 1
    -0
     1
×6    6
     -0
      6
×6   36
    - 0
     36
×6   216
    -185
      31
×6   186
    -185
       1
```

あまりに1が出てきたので
計算は始めにもどります。
0055
をくり返します。

$$\frac{0}{1} + \frac{0}{6} + \frac{0}{36} + \frac{5}{216} + \frac{5}{1296}$$

$$= 0 + 0 + 0 + \frac{5 \times 6}{1296} + \frac{5}{1296}$$

$$= \frac{35}{1296} \qquad 37 \times 35 = 1295$$

$$= 1296 - 1$$

$37 \times 35 = 1295 = 1296 - 1$
を 6進法で計算します。

$37 = 6^2 + 1 \rightarrow 101$

$35 = 6^2 - 1 \rightarrow 55$

$1295 = 6^4 - 1 \rightarrow 5555$

$1296 = 6^4 \rightarrow 10000$

$101 \times 55 = 5555$

$= 10000 - 1$

6進法での計算です

P.3 との共通点は?

1

ハレー法（3次収束）について

平成14年4月10日の二宮市三さんの手紙

今方程式 $f(x)=0$ を解いているとします．根の近似値 x_n まで来ていて，根は $x=x_n+\epsilon$ で表されるとします．この x を $f(x)=0$ に代入し，$f(x)$ を x_n の近傍で展開して微小量 ϵ の二乗まで取りますと
$f(x_n)+\epsilon f'(x_n)+\epsilon^2 f''(x_n)/2=0$ - - - (F)　となります．もし ϵ^2 を省略して，上式を ϵ について解くと $\epsilon=-f(x_n)/f'(x_n)$ となり，x_n の次の近似値として $x_{n+1}=x_n+\epsilon$ とすればニュートン法 $x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$ が出てきます．平方根は $f(x)=x^2-a$，立方根は $f(x)=x^3-a$ と置いた特別の場合です．微小量 ϵ の一乗まで合わせたのだから，x_{n+1} の誤差は ϵ の二乗に比例する筈です．ϵ の二乗まで合わせたらどうなるでしょう．二次方程式(F)をそのまま解くこともできますが，少し技巧をこらして(F)式の ϵ^2 の代わりに $-\epsilon f(x_n)/f'(x_n)$ と取りましょう．そうすると(F)式は一次方程式となり $\epsilon=-f(x_n)/(f'(x_n)-f(x_n)f''(x_n)/(2f'(x_n)))$ と解けます．これを反復法の形にまとめて $x_{n+1}=x_n-f/(f'-ff''/(2f'))$ - - - (H) とします．(x_n) は省略しました．これがハレイの方法です.(ハレイ彗星のハレイです)．この方法はその作り方から三次の収束性を持ちます．x_{n+1} の誤差は ϵ^3 に比例します．$f(x)=x^2-a$ の場合と $f(x)=x^3-a$ の場合があなたの(B)有理式の場合に一致することを確かめて下さい．ハレイの方法はニュートン法より1.5倍早い訳ですが一回の反復に要する計算量が多いので結局どちらが早いか一概には決められません．

2011．10．11
文責　林 邦英

2

ハレー法の特性を生かす方法は？

ハレー彗星を発見したハレーさんの考えたハレー法は、3次収束します。ニュートン法（2次収束）より、1.5倍早い訳ですが、一回の反復に要する計算量が多いので、結局どちらが早いか一概には決められません。（二宮市三さんの手紙より）

そこで、ハレー法の特性を生かす方法を考えました。

① 3次収束について
(ア) 平方根の小さい近似分数を求める加速法
(イ) 分数乗根の場合　（例として、2.3乗根）
② 反比例のグラフの形（分数関数近似）について
　区間近似式への応用

ハレーさん，ニュートンさん，テイラーさんの考え方のちがいに関心をもちました。

3

ハレー法（3次収束）のはじまりは？

① $\sqrt{2}$ について
　$7/5=(6+1)/(6-1)$ に着目する方法
② 1に近い　分数の平方根の分析
③ $\sqrt[3]{2}$ について
　$1+1/4=1+1/(3+1)$ に着目する方法
④ $\sqrt{2}$ について
　$\frac{2\ (\times 4)}{1\ (\times 4)}$　$\frac{8}{4}$　$\frac{8+4}{2}=6\ \begin{matrix}(+1)\\(-1)\end{matrix}$　$\frac{7}{5}$
とする方法（小さい近似分数を求める加速法）

4つの方法を考えましたがよくわかりません。

4

$\sqrt{2}$ の近似分数を求める基本的だと考えられる4つの方法について

表紙を作り、$\sqrt{2}$ の近似分数の表を示し、赤と青でしるしをつけました。② 2次収束と ③ 3次収束の方法で作られる近似分数と対応させました。基準は1次収束。
① 一次収束の方法は、$\sqrt{2}$ の場合の限定された方法です。部分的には以前も使いました。

$\sqrt{7}$ の場合の例として　（ヘロン式 第3分数 数列）
　$8/3$　$21/8$　$29/11$
　$A=-1$　$A=7$　$A=6=-1+7$
約分を使うと　$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$ の場合でも使えました。
平方根の近似分数を考える上で意味があるように思います。
④ ボンベリ式連分数を4つ目に選びました。連分数を考えた時、こちらの方が古いと思うし、使い方が簡単だからです。$\sqrt{7}$ の場合は、$\sqrt{7}=2+\cfrac{3}{4+\cfrac{3}{4+}}$
$7=2^2+3$ を使って

$\sqrt{2}$ の近似分数の表

1	$\frac{1}{1}$
2	$\frac{3}{2}$
3	$\frac{7}{5}$
4	$\frac{17}{12}$
5	$\frac{41}{29}$
6	$\frac{99}{70}$
7	$\frac{239}{169}$
8	$\frac{577}{408}$
9	$\frac{1393}{985}$
10	$\frac{3363}{2378}$
11	$\frac{8119}{5741}$
12	$\frac{19601}{13860}$
13	$\frac{47321}{33461}$
14	$\frac{114243}{80782}$
15	$\frac{275807}{195025}$
16	$\frac{665857}{470832}$
17	$\frac{1607521}{1136689}$
18	$\frac{3880899}{2744210}$
19	$\frac{9369319}{6625109}$
20	$\frac{22619537}{15994428}$
21	$\frac{54608393}{38613965}$
22	$\frac{131836323}{93222358}$
23	$\frac{318281039}{225058681}$
24	$\frac{768398401}{543339720}$
25	$\frac{1855077841}{1311738121}$
26	$\frac{4478554083}{3166815962}$
27	$\frac{10812186007}{7645370045}$

$\sqrt{2}$ の近似分数を求める基本的だと考えられる4つの方法

文責
林 邦英

1

$\sqrt{2}$の近似分数の作り方

① 〔一次収束〕

$\frac{1}{1}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{7}{5}$ $\left(\frac{3+4}{2+3} = \frac{7}{5}\right)$

$\frac{7}{5}$ $\frac{10}{7}$ $\frac{17}{12}$

$\frac{17}{12}$ $\frac{24}{17}$ $\frac{41}{29}$

$\frac{41}{29}$ $\frac{58}{41}$ $\frac{99}{70}$

$\frac{99}{70}$ $\frac{140}{99}$ $\frac{239}{169}$

$\frac{239}{169}$ $\frac{338}{239}$ $\frac{577}{408}$

$\frac{577}{408}$ $\frac{816}{577}$ $\frac{1393}{985}$

$\frac{1393}{985}$ $\frac{1970}{1393}$ $\frac{3363}{2378}$

2

② 〔2次収束〕

$2 = 2 \times 1$

$\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ $2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$\frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12}$ $2 \times \frac{12}{17} = \frac{24}{17}$

$\frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408}$ $2 \times \frac{408}{577} = \frac{816}{577}$

$\frac{\frac{577}{408} + \frac{816}{577}}{2} = \frac{665857}{470832}$

$2 \times \frac{470832}{665857} = \frac{941664}{665857}$

$\frac{\frac{665857}{470832} + \frac{941664}{665857}}{2}$

$= \frac{886731088897}{627013566048}$

3

③ 〔3次収束〕

$\frac{2}{1} \begin{matrix}(\times 4)\\(\times 4)\end{matrix}$ $\frac{8}{4}$ $\frac{8+4}{2} = 6 \begin{matrix}(+1)\\(-1)\end{matrix}$ $\frac{7}{5}$

$2 \times \frac{5^2}{7^2} = \frac{50}{49} \begin{matrix}(\times 4)\\(\times 4)\end{matrix}$ $\frac{200}{196} \rightarrow 198$

$198 \begin{matrix}(+1)\\(-1)\end{matrix}$ $\frac{199}{197} \begin{matrix}(\times 7)\\(\times 5)\end{matrix}$ $\frac{1393}{985}$

$2 \times \frac{985^2}{1393^2} = \frac{1940450}{1940449} \begin{matrix}(\times 4)\\(\times 4)\end{matrix}$

$\frac{7761800}{7761796} \rightarrow 7761798 \begin{matrix}(+1)\\(-1)\end{matrix}$

$\frac{7761799}{7761797} \begin{matrix}(\times 1393)\\(\times 985)\end{matrix}$ $\frac{10812186007}{7645370045}$

4

④ 〔ボンベリ式連分数〕

$2 = 1^2 + 1$

$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}$

$\frac{1}{0}$ $\frac{1}{1}$ ½ $\frac{3}{2}$ ½ $\frac{7}{5}$ ½ $\frac{17}{12}$ ½ $\frac{41}{29}$

½ $\frac{99}{70}$ ½ $\frac{239}{169}$ ½ $\frac{577}{408}$ ½ $\frac{1393}{985}$ ½ $\frac{3363}{2378}$

$$\left(\begin{matrix} 7 \times 1 + 17 \times 2 = 41 \\ 5 \times 1 + 12 \times 2 = 29 \end{matrix}\right)$$

① について

1

$\sqrt{2}$ の近似分数を求める簡単な計算法

$\frac{a}{b}$	$2\times\frac{b}{a}$	$\frac{a+2b}{b+a}$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$
$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{17}{12}$
$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$	$\frac{41}{29}$
$\frac{41}{29}$	$\frac{58}{41}$	$\frac{99}{70}$
$\frac{99}{70}$	$\frac{140}{99}$	$\frac{239}{169}$
$\frac{239}{169}$	$\frac{338}{239}$	$\frac{577}{408}$

2

$(分子)^2 + A = 2 \times (分母)^2$

の A を使って分類します。

A	1	−2	−1	2
	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$
	$\frac{41}{29}$	$\frac{58}{41}$	$\frac{99}{70}$	$\frac{140}{99}$
	$\frac{239}{169}$	$\frac{338}{239}$	$\frac{577}{408}$	

3

$\sqrt{3}$ の場合

$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{2}=\frac{2}{1}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{19}{11}$
$\frac{19}{11}$	$\frac{33}{19}$	$\frac{52}{30}=\frac{26}{15}$
$\frac{26}{15}$	$\frac{45}{26}$	$\frac{71}{41}$
$\frac{71}{41}$	$\frac{123}{71}$	$\frac{194}{112}=\frac{97}{56}$

4

$\sqrt{5}$ の場合

$\frac{1}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{2}=\frac{3}{1}$
$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{4}=\frac{2}{1}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{22}{10}=\frac{11}{5}$
$\frac{11}{5}$	$\frac{25}{11}$	$\frac{36}{16}=\frac{9}{4}$
$\frac{9}{4}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{29}{13}$
$\frac{29}{13}$	$\frac{65}{29}$	$\frac{94}{42}=\frac{47}{21}$
$\frac{47}{21}$	$\frac{105}{47}$	$\frac{152}{68}=\frac{38}{17}$

② について
5

加速法 （$\sqrt{2}$ の場合）

$2 = 2 \times 1$

$\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \qquad 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$\frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}$

$2 \times \frac{12}{17} = \frac{24}{17}$

$\frac{\frac{17}{12} + \frac{24}{17}}{2} = \frac{289+288}{408} = \frac{577}{408}$

A	-1	2
	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
	$\frac{17}{12}$	$\frac{24}{17}$
	$\frac{577}{408}$	

③ について
6

$\sqrt{2} > \frac{7}{5}$ の求め方

$\frac{2}{1} \qquad \frac{7}{5}$

$\frac{2}{1} \qquad \begin{matrix} 6+1 \\ 6-1 \end{matrix} \quad \frac{7}{5}$

$\frac{2}{1} \qquad 6 \quad \begin{matrix} 6+1 \\ 6-1 \end{matrix} \quad \frac{7}{5}$

$\frac{2}{1} \qquad \frac{8+4}{2} = 6 \quad \begin{matrix} 6+1 \\ 6-1 \end{matrix} \quad \frac{7}{5}$

$\frac{2}{1} \begin{matrix} (\times 4) \\ (\times 4) \end{matrix} \frac{8}{4} \quad \frac{8+4}{2} = 6 \quad \begin{matrix} 6+1 \\ 6-1 \end{matrix} \quad \frac{7}{5}$

7

$\sqrt{3}$ の場合

$\frac{3}{1} \qquad \frac{5}{3}$

$\frac{3}{1} \qquad \begin{matrix} 4+1 \\ 4-1 \end{matrix} \quad \frac{5}{3}$

$\frac{3}{1} \qquad 4 \quad \begin{matrix} 4+1 \\ 4-1 \end{matrix} \quad \frac{5}{3}$

$\frac{3}{1} \qquad \frac{6+2}{2} = 4 \quad \begin{matrix} 4+1 \\ 4-1 \end{matrix} \quad \frac{5}{3}$

$\frac{3}{1} \begin{matrix} (\times 2) \\ (\times 2) \end{matrix} \frac{6}{2} \quad \frac{6+2}{2} = 4 \quad \begin{matrix} 4+1 \\ 4-1 \end{matrix} \quad \frac{5}{3}$

$\frac{7}{9} \begin{matrix} (\times 2) \\ (\times 2) \end{matrix} \frac{14}{18} \quad 16 \begin{matrix} (-1) \\ (+1) \end{matrix} \frac{15}{17} \quad \overset{(\times 3)}{} \quad \frac{45}{17}$

$\left(\frac{45}{17}\right)^2 = 7.006920412$

8

$\sqrt{5}$ の場合

$\frac{5}{1} \begin{matrix} (\times 1) \\ (\times 1) \end{matrix} \frac{5}{1} \quad \frac{5+1}{2} = 3 \begin{matrix} (+1) \\ (-1) \end{matrix} \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$

$\frac{5}{4} \begin{matrix} (\times 4) \\ (\times 4) \end{matrix} \frac{20}{16} \quad 18 \begin{matrix} (+1) \\ (-1) \end{matrix} \frac{19}{17} \quad \overset{(\times 2)}{} \quad \frac{38}{17}$

$\frac{10}{9} \begin{matrix} (\times 4) \\ (\times 4) \end{matrix} \frac{40}{36} \quad 38 \begin{matrix} (+1) \\ (-1) \end{matrix} \frac{39}{37} \quad \overset{(\times 3)}{} \quad \frac{117}{37}$

$\left(\frac{117}{37}\right)^2 = 9.999269538$