武田 利一 様

2011・5・15

林 邦英

この10年の数学の学習をふり返ってみました。

① 具体的な数値へのこだわり。

② 異なる方法（視点）を組み合わせる。

③ 単純なものから複雑なものへの発生学的（形成史的）な再構成。

5月になり、3人目の孫が生まれました。

1980年代を思い出しました。信じていたものを失ったとき、いかに生きぬくのか。

①仕事という形式に支えられました。

②妻と子どもに支えられました。（ふみ）

③新しい分野の多くの本を読みました。

長女と次女のおさなかった頃を思い出します。

二宮　市三さんにハレー法について教えていただいたことをうれしく思っています。手紙を読みかえしました。平成14年のものです。

ハレーさんとテイラーさんの考え方のちがいについて関心があります。長田さんと和田さんに手紙をいただきました。まだ文章化できていません。もうしわけありません。

「批判的精神、多面的な視点、自己反省」

山形県の元高校の先生が、小倉　金之助さんについて書かれた文章の中にありました。以前、山形県の方にいただいた本の中にありました。

自己反省。孫　文さんの「三民主義」（岩波文庫）のP.93にベーコンさんの名が出てきます。またP.128に「修身・斉家・治国・平天下」とあります。

組織がくずれるのは内側からとよく言われますが、1人の人間でも同じだと思います。

　小倉　金之助さんが、3つの視点を示していることはすばらしいと思います。

　鈴木　眼、学会の学習会（5月1日）で、庄内藩の「致道館」について石川氏に教えていただき関心をもちました。

「第三者的批判ではなく、自身をその立場に置いての観察と批判である。」

　異論はあります。人はいつも強くはあれないからです。人は生ま身だとつくづく思います。

［追記］

　5月29日の東海市平洲祭に参加しました。大雨の中、100名以上の参加がありました。米沢市長よりのメッセージは「勇気をもとう」でした。

　5月は人の生死について考えさせられました。

2011.5.29

林　邦英

無理関数の分数関数近似

（一点近似と区間近似）

［ハレーさんとテイラーさんの考え方のちがいは何だろうか。］

$\boxed{\text{近似について}}$

（直線による近似
曲線による近似）

① 区間の直線近似
② 接線法
③ ハレー法 ― 分数関数近似
④ ハレー法′ ― 区間近似（1次）
⑤ ハレー法″ ― 区間近似（2次）

文責　林 邦英

2011. ~~4. 27~~ 5. 10

・テイラーさんの多項式近似法
・平方根の場合の連分数による近似
・開平法。

単純なものから高度なものへの形成史の再構成
（発生学、進化論、弁証法）
ヘーゲル

1

アラビアの方法を使って（立方根の場合は？）

復刻版 カジョリ初等数学史 小倉金之助 補訳

（共立出版） 215ページ を参考にしました。

ありがとうございます。

「不尽根数の場合に大いに興味があるのは、近似値を求める法則の発見であった。」

過剰な近似値

$$\sqrt{a^2-x} = a+\frac{x}{2a}$$

不足な近似値

$$\sqrt{a^2-x} = a+\frac{x}{2a+1}$$

$-x$ は $+x$ の誤植だと思います。

$$② \quad \boxed{a+\frac{x}{2a} > \sqrt{a^2+x} > a+\frac{x}{2a+1}} \quad ①$$

アラビアの方法

2

$y = \sqrt{x}$ $\qquad x \geqq 0$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	1			2					3		

区間を直線で近似します。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	1	$4/3$	$5/3$	2	$11/5$	$12/5$	$13/5$	$14/5$	3	$22/7$	$23/7$

傾き $\quad 1/1 \quad 1/3 \quad 1/5 \quad 1/7$

$1/0 \quad 1/2 \quad 1/4 \quad 1/6$

$(1,1) \quad (4,2) \quad (9,3)$

$1/(1\times2) \quad 1/(2\times2) \quad 1/(3\times2)$

区間近似の傾きの中間値を使い、接線近似の式を作ります。

$$\sqrt{1^2+a} < 1+\frac{a}{2} \qquad \sqrt{2^2+a} < 2+\frac{a}{4}$$

$$\sqrt{3^2+a} < 3+\frac{a}{6}$$

3

$\sqrt{5}$ について $\qquad 5 = 2^2+1$

$$2+\frac{1}{4} > \sqrt{2^2+1} > 2+\frac{1}{5}$$

↓ 2乗すると ↓

5.0625 $\qquad$ 4.84

$\sqrt{10}$ について $\qquad 10 = 3^2+1$

$$3+\frac{1}{6} > \sqrt{3^2+1} > 3+\frac{1}{7}$$

↓ $\qquad$ ↓

$10.02\dot{7}$ $\qquad$ 9.87755……

4

立方根の場合

$y = \sqrt[3]{x}$ $\qquad x \geqq 0$

x	0	1	8	27	64	125
y	0	1	2	3	4	5

傾き $\quad 1/1 \quad 1/7 \quad 1/19 \quad 1/37 \quad 1/61$

（中間値） $\quad 1/4 \quad 1/13 \quad 1/28 \quad 1/49$

$\sqrt[3]{2}$ $\quad 1+\frac{1}{4}$ $\quad$ 3乗すると 1.953125

2より小さいので補正します。

$1+\frac{1}{3}$ $\quad$ 3乗すると 2.370370367

$\sqrt[3]{9}$ $\quad 2+\frac{1}{13}$ $\quad$ 3乗すると 8.959035034

9より小さいので補正します。

$2+\frac{1}{12}$ $\quad$ 3乗すると 9.042245365

$2+\frac{1}{11}$ $\quad$ 3乗すると 9.141247169

$1+\frac{1}{3} > \sqrt[3]{2} > 1+\frac{1}{7}$

↓ 3乗すると ↓

2.370370367 1.492711366

$1+\frac{1}{4}$ の場合は 1.953125

3つの中で一番精度が良くなります。

$2+\frac{1}{12} > \sqrt[3]{9} > 2+\frac{1}{19}$

↓ 3乗すると ↓

9.042245365 8.648345227

精度を良くするには？

$1+\frac{1}{4}$

の 4 に注目します。

$4 = 3+1$

$\sqrt[3]{1.1}$ の場合

$1+\frac{0.1}{3} = 1+\frac{1}{30}$ 3乗すると 1.103370369

$1+\frac{1}{31}$ 1.099929506

$1+\frac{1}{32}$ 1.096710204

$\sqrt[3]{1.2}$ の場合

$1+\frac{0.2}{3} = 1+\frac{2}{30}$ 1.213629626

$1+\frac{2}{31}$ 1.206303916

$1+\frac{2}{32}$ 1.19946289

$1+\frac{2}{33}$ 1.193060074

$\sqrt[3]{1+a} \fallingdotseq 1+\frac{a}{3+a}$

3

$\sqrt[3]{28}$ の場合 $28 = 3^3+1$

$3+\frac{1}{27}$ 3乗すると 28.01239648

$3+\frac{1}{28}$ 27.97581083

$3+\frac{1}{29}$ 27.94177701

$\frac{1}{27}$ と $\frac{1}{28}$ の間を調べます。

$\frac{1}{27} = \frac{3}{81}$

$3+\frac{3}{82}$ 27.99990022

$3+\frac{3}{83}$ 27.89770869

$\sqrt[3]{28} \fallingdotseq 3+\frac{3}{82}$

$\frac{3}{82} = \frac{1}{27+\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{9}$ の場合にあてはめると

$2+\frac{1}{12+\frac{1}{2}} = 2+\frac{2}{25}$

3乗すると 8.998912

$a+\frac{x}{3a^2} > \sqrt[3]{a^3+x} > a+\frac{a\cdot x}{3a^3+x}$

3

$\sqrt[12]{2}$ の近似値は $12 = 2\times2\times3$

2 √ √ 1.189207115

− 1 = ÷ 3 = + 1 =

1.0630693833

2 √ √ − 1 = M+ + 3 = ÷ MRC

= ÷ = + 1 =

1.059327321 23

2 ^ (1 ÷ 12) = 1.059463094

No.
Date

$\sqrt[3]{N}$ （$1 < N < 8$）の区間近似式

$$\sqrt[3]{1+a} \fallingdotseq 1+\frac{a}{3+a}$$

の式は a が大きくなると誤差が大きくなります。

$\sqrt[3]{5}$ の場合は　$5 = 1+4$　だから

$$1+\frac{4}{3+4} = \frac{11}{7}$$

3乗すると、　3.880466467

分母を小さくする必要があります。

$\sqrt[3]{8}$ の場合は　$8 = 1+7$　だから

$$1+\frac{7}{3+7} = 1+\frac{7}{10}$$

2にするためには、

$$1+\frac{7}{10-3}$$

分母から 3 を引く必要があります。

$\sqrt[3]{N}$	$\sqrt[3]{1+a}$	(A)	(B)
N	a	$1+\frac{a}{3+a}$	補正式
1	0	$1+\frac{0}{3}$	$1+\frac{0}{3}$
2	1	$1+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{4}$
3	2	$1+\frac{2}{5}$	$1+\frac{2}{4.5}$
4	3	$1+\frac{3}{6}$	$1+\frac{3}{5}$
5	4	$1+\frac{4}{7}$	$1+\frac{4}{5.5}$
6	5	$1+\frac{5}{8}$	$1+\frac{5}{6}$
7	6	$1+\frac{6}{9}$	$1+\frac{6}{6.5}$
8	7	$1+\frac{7}{10}$	$1+\frac{7}{7}$

（A）と（B）を比べます。3乗します。

N	(A)	(B)
1	1	1
2	1.953	1.953
3	2.744	3.014
4	3.375	4.096
5	3.880	5.153
6	4.291	6.162
7	4.630	7.112
8	4.913	8

（B）の補正式　（$1 < a < 7$）

$$1+\frac{a}{3+a-\frac{a-1}{2}}$$

4

$\sqrt[3]{N}$　（$1 < N < 8$）

を直線で近似します。

$8-1 = 7$

N		3乗すると
2	$\frac{8}{7}$	1.493
3	$\frac{9}{7}$	2.125
4	$\frac{10}{7}$	2.915
5	$\frac{11}{7}$	3.880
6	$\frac{12}{7}$	5.038
7	$\frac{13}{7}$	6.405

（B）の補正式の精度の良いことがわかります。

$$X^{\frac{1}{N}} \fallingdotseq \frac{(N+1)\cdot X + (N-1)}{(N-1)\cdot X + (N+1)}$$

（応用数学＝工学部？）
（Xは1の近く）

名古屋大学 工学部 ⟷ えひめ大学工学部の研究

無理関数の分数関数近似　文責 林 邦英

$\sqrt{N}$　$(1 < N < 4)$

$1 < N \leqq 2$	$2 < N < 4$
$3 + \frac{-8}{N+3}$	$5 + \frac{-36}{N+8}$

$\sqrt[3]{N}$　$(1 < N < 8)$

$1 < N \leqq 2$	$2 < N < 8$
$2 + \frac{-3}{N+2}$	$3 + \frac{-14}{N+6}$

$\sqrt{N}$		$\sqrt[3]{N}$	
1.5	1.222	2	1.25
2	1.4	3	1.444
2.5	1.571	4	1.6
3	1.727	5	1.727
3.5	1.870	6	1.833
		7	1.923

アラビアの方法

② ①

$$\boxed{a + \frac{x}{2a}} > \sqrt{a^2+x} > \boxed{a + \frac{x}{2a+1}}$$

右辺は、区間を直線で近似した時の傾きを使います。

左辺は、区間近似の傾きの中間値を使い、接線近似の式になります。右辺の方が古く、左辺はヘロンさんは知っていたそうです。

$y = \sqrt{x}$　　$x \geqq 0$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	1	4/3	5/3	2	11/5	12/5	13/5	14/5	3	22/7

傾き				
（右辺）	1/1	1/3	1/5	1/7
（左辺）	1/2	1/4	1/6	

$\sqrt{5}$ について　　$5 = 2^2 + 1$

$$2 + \frac{1}{4} > \sqrt{2^2+1} > 2 + \frac{1}{5}$$

5.0625　2乗すると　4.84

アラビアの方法（立方根の場合）

$y = \sqrt[3]{x}$　　$x \geqq 0$

x	0	1	8	27	64
y	0	1	2	3	4
傾き		1/1	1/7	1/19	1/37
中間値		1/4	1/13	1/28	

接線の式を求めるためには中間値を補正する必要がありますが、同時により精度のよい方法の糸口になります。

$\sqrt[3]{2}$　$1 + \frac{1}{4}$　3乗すると 1.953125

2より小さいので補正します。

$1 + \frac{1}{3}$　2.370370367

$$1 + \frac{1}{3} > \sqrt[3]{2} > 1 + \frac{1}{7}$$

3乗すると 1.492711366

$1 + \frac{1}{4}$ の精度が一番良くなります。

$4 = 3 + 1$ に注目します。

$\sqrt[3]{1.2}$ の場合　　3乗すると

$1 + \frac{0.2}{3} = 1 + \frac{2}{30}$　1.213629626

$1 + \frac{2}{31}$　1.206303916

$1 + \frac{2}{32}$　1.19946289

$$\boxed{\sqrt[3]{1+a} \fallingdotseq 1 + \frac{a}{3+a}}$$（一点近似）

a が大きくなると誤差が大きくなります。

$\sqrt[3]{8}$ の場合は $8 = 1 + 7$ だから

$1 + \frac{7}{3+7} = 1 + \frac{7}{10}$　分母から3を引く必要があります。

補正式　（区間近似）

$$1 + \frac{a}{3 + a - \frac{a-1}{2}} = 1 + \frac{2a}{a+7} = 3 + \frac{-14}{a+7}$$

$(1 < a < 7)$

無理関数の分数関数近似

$$X^{\frac{1}{N}} \fallingdotseq \frac{(N+1)\cdot X+(N-1)}{(N-1)\cdot X+(N+1)}$$ （Xは1の近く）

長田直樹さんの「お話数値解析」の「非線型方程式（後編）」（理系への数学 2009年4月号）にハリーさん（ハレーさん）の

$$\sqrt[n]{a^n+b} \fallingdotseq a+\frac{ab}{na^n+\frac{1}{2}(n-1)b}$$

の式が紹介されています。インターネットを使って知りました。

$n=3$ $a=1$ $b=1$ を代入します。

$$\sqrt[3]{1^3+1} \fallingdotseq 1+\frac{1\times 1}{3\times 1^3+\frac{1}{2}(3-1)\times 1}$$

$$=1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}\times 2}$$

$$=1+\frac{1}{4}=1.25$$

上の式と数値が同じになります。一点近似です。

区間近似の式に変形します。

$$\sqrt[3]{1+a} \fallingdotseq 1+\frac{a}{3+a}$$

$\sqrt[3]{8}=2$ を使用して補正します。

$$\sqrt[3]{1+a} \fallingdotseq 1+\frac{a}{3+a-\frac{a-1}{2}} \quad (1<a<7)$$

$\sqrt[3]{2} \fallingdotseq \frac{287}{227}$ を使用して補正します。

$$\sqrt[3]{1+a} \fallingdotseq 1+\frac{a}{3+a-\frac{9a^2}{59}} \quad (0<a\leqq 1)$$

補正式の形は少しちがいます。

$\frac{a-1}{2}$ と $\frac{9a^2}{59}$

の a の次数です。

$\sqrt{1+a}$

一点近似	区間近似
$1+\frac{a}{2}$	（$\sqrt{4}=2$ を使用）
$1+\frac{2a}{4+a}$	$1+\frac{2a}{4+a-\frac{a-1}{2}}$ （$1<a<3$）
	$1+\frac{2a}{4+a-\frac{35a^2}{204}}$ （$0<a\leqq 1$）（$\sqrt{2}\fallingdotseq\frac{1393}{985}$ を使用）

$\sqrt{N}$ （$1<N<4$）

$1<N\leqq 2$	$2<N<4$
$3+\frac{-8}{N+3}$	$5+\frac{-36}{N+8}$

$\sqrt[3]{1+a}$

一点近似	区間近似
$1+\frac{a}{3}$	（$\sqrt[3]{8}=2$ を使用）
$1+\frac{a}{3+a}$	$1+\frac{a}{3+a-\frac{a-1}{2}}$ （$1<a<7$）
	$1+\frac{a}{3+a-\frac{9a^2}{59}}$ （$0<a\leqq 1$）（$\sqrt[3]{2}\fallingdotseq\frac{286}{227}$ を使用）

$\sqrt[3]{N}$ （$1<N<8$）

$1<N\leqq 2$	$2<N<8$
$2+\frac{-3}{N+2}$	$3+\frac{-14}{N+6}$

数学においての「戦略的高地」とは？

5乗根の有理関数近似

$$X^{\frac{1}{N}} \fallingdotseq \frac{(N+1)\cdot X+(N-1)}{(N-1)\cdot X+(N+1)} \quad -①$$

①の式の N に 5を代入します。

$$X^{\frac{1}{5}} \fallingdotseq \frac{(5+1)\cdot X+(5-1)}{(5-1)\cdot X+(5+1)}$$

$$= \frac{6X+4}{4X+6} = \frac{3X+2}{2X+3} \quad -②$$

②の式の X に 1+a を代入します。

$$\frac{3X+2}{2X+3} = \frac{3+3a+2}{2+2a+3} = \frac{3a+5}{2a+5} = 1+\frac{a}{2a+5}$$

$\sqrt[5]{2}$ を求めユークリッド互除法を使い近似分数を作ります。

$\sqrt[5]{2} \fallingdotseq 1.148698355$

$\sqrt[5]{2} = 1+.(6,1,2,1,1,1,3,\cdots)$

	6	1	2	1	1	1	3
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{23}{20}$	$\frac{31}{27}$	$\frac{54}{47}$	$\frac{85}{74}$	$\frac{309}{269}$

$$\frac{309}{269} = 1+\frac{40}{269}$$

を使います。

$$1+\frac{a}{2a+5}$$

の a に 1を代入すると

$$1+\frac{1}{2+5} = 1+\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{7-x} = \frac{40}{269}$$

$$269 = 280-40x$$

$$-11 = -40x$$

$$x = \frac{11}{40}$$

$$\boxed{\sqrt[5]{1+a} \fallingdotseq 1+\frac{a}{2a+5-\frac{11a^2}{40}}}$$

5

誤差を調べます。

$$\sqrt[5]{N} \fallingdotseq \frac{69+142N-11N^2}{109+102N-11N^2}$$

$$(1<N<2)$$

$$1+\frac{a}{2a+5}-\sqrt[5]{1+a}$$

a		
0.1	−1.4107261	E−05
0.2	−1.100252299	E−04
0.3	−3.0252349	E−04
0.4	−6.44858483	E−04
0.5	−1.138437867	E−03
0.6	−1.786349757	E−03
0.7	−2.586585938	E−03
0.8	−3.533991929	E−03
0.9	−4.621547634	E−03
1.0	−5.841212143	E−03
1.1	−7.184480876	E−03
1.2	−8.642750802	E−03

$$1+\frac{a}{2a+5-\frac{11a^2}{40}}-\sqrt[5]{1+a}$$

a		
0.1	−3.931761	E−06
0.2	−2.4652484	E−05
0.3	−6.4705839	E−05
0.4	−1.17672458	E−04
0.5	−1.72508819	E−04
0.6	−2.16009622	E−04
0.7	−2.34200758	E−04
0.8	−2.13111896	E−04
0.9	−1.39185302	E−04
1.0	5.29758	E−07
1.1	2.18308531	E−04
1.2	5.25755226	E−04

5乗根の有理関数近似

$$X^{\frac{1}{N}} \doteqdot \frac{(N+1)\cdot X+(N-1)}{(N-1)\cdot X+(N+1)} \quad -①$$

①の式の N に 5を代入します。

$$X^{\frac{1}{5}} \doteqdot \frac{(5+1)\cdot X+(5-1)}{(5-1)\cdot X+(5+1)}$$

$$= \frac{6X+4}{4X+6} = \frac{3X+2}{2X+3} \quad -②$$

②の式の X に 1+a を代入します。

$$\frac{3X+2}{2X+3} = \frac{3+3a+2}{2+2a+3} = \frac{3a+5}{2a+5} = 1+\frac{a}{2a+5}$$

$\sqrt[5]{2}$ を求めユークリッド互除法を使い近似分数を作ります。

$\sqrt[5]{2} \doteqdot 1.148698355$

$\sqrt[5]{2} = 1+(6,1,2,1,1,1,3,\cdots)$

	6	1	2	1	1	1	3
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{23}{20}$	$\frac{31}{27}$	$\frac{54}{47}$	$\frac{85}{74}$	$\frac{309}{269}$

$$\frac{309}{269} = 1+\frac{40}{269}$$

を使います。

$$1+\frac{a}{2a+5}$$

の a に 1 を代入すると

$$1+\frac{1}{2+5} = 1+\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{7-x} = \frac{40}{269}$$

$$269 = 280-40x$$

$$-11 = -40x$$

$$x = \frac{11}{40}$$

$$\sqrt[5]{1+a} \doteqdot 1+\frac{a}{2a+5-\frac{11a^2}{40}}$$

誤差を調べます。

$$1+\frac{a}{2a+5} - \sqrt[5]{1+a}$$

a		
0.1	−1.4107261	E−05
0.2	−1.100252299	E−04
0.3	−3.0252349	E−04
0.4	−6.44858483	E−04
0.5	−1.138437867	E−03
0.6	−1.786349757	E−03
0.7	−2.586585938	E−03
0.8	−3.533991929	E−03
0.9	−4.621547634	E−03
1.0	−5.841212143	E−03
1.1	−7.184480876	E−03
1.2	−8.642750802	E−03

$$1+\frac{a}{2a+5-\frac{11a^2}{40}} - \sqrt[5]{1+a}$$

a		
0.1	−3.931761	E−06
0.2	−2.46522484	E−05
0.3	−6.4705839	E−05
0.4	−1.17672458	E−04
0.5	−1.72508819	E−04
0.6	−2.16009622	E−04
0.7	−2.34200938	E−04
0.8	−2.13111896	E−04
0.9	−1.39185302	E−04
1.0	5.29758	E−07
1.1	2.18308531	E−04
1.2	5.25755226	E−04

(視点)

① 異なる方法を組み合わせる。

② 単純なものから複雑なものへの
発生学的再構成。
(形成史的)

1 ③ 具体的な数値へのこだわり。

具体的な事実から出発し、自分の
体と頭を使って~~考えること~~
生かされて生きぬく。

数学における実験と観察
(物理的方法と化学的方法)