武田 利一 様

2011・2・1

林 邦英

カジョリ初等数学史の43ページにアルキメデスさんの$\sqrt{3}$について書かれています。

$$\sqrt{3} < \frac{1351}{780} \qquad \text{(強1)}$$

$$\sqrt{3} > \frac{265}{153} \qquad \text{(弱2)}$$

(疑問その1)

どのようにしてこの近似分数を求めたのだろうか。下の方法とはちがいます。

$$\frac{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4} \qquad \frac{\frac{7}{4}+\frac{12}{7}}{2} = \frac{97}{56}$$

$$\frac{\frac{97}{56}+\frac{168}{97}}{2} = \frac{18817}{10864}$$

（疑問その２）

$$\frac{1351}{780}$$（強１）

の分数を使って（弱２）の分数を作ることができるのに、精度の悪い（弱２）をどうして使ったのか。

$$\frac{3\times780}{1351}=\frac{2340}{1351}$$（弱３）

$1351+2340=3691$

$780+1351=2131$

$$\frac{3691}{2131}$$（弱２）

アラビアの方法を立方根の場合で考えてみました。

$$a+\frac{x}{3a^2}>\sqrt[3]{a^3+x}>a+\frac{a\cdot x}{3a^3+x}$$

（２次収束）　（３次収束）

平方根の場合とはちがうものになりました。

お体を大切にして下さい。

No.

Date

1

アラビアの方法を使って（立方根の場合は？）

復刻版 カジョリ初等数学史 小倉金之助 補訳

（共立出版）215ページ を参考にしました。

ありがとうございます。

「不尽根数の場合に大いに興味があるのは、近似値を求める法則の発見であった。」

過剰な近似値

$$\sqrt{a^2-x} = a + \frac{x}{2a}$$

不足な近似値

$$\sqrt{a^2-x} = a + \frac{x}{2a+1}$$

$-x$ は $+x$ の誤植だと思います。

$$a+\frac{x}{2a} > \sqrt{a^2+x} > a+\frac{x}{2a+1}$$

アラビアの方法

2

$y = \sqrt{x} \qquad x \geqq 0$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	1			2					3		

区間を直線で近似します。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	1	4/3	5/3	2	11/5	12/5	13/5	14/5	3	22/7	23/7

傾き　1/1　1/3　1/5　1/7

1/0　1/2　1/4　1/6

(1, 1)　(4, 2)　(9, 3)

1/(1×2)　1/(2×2)　1/(3×2)

区間近似の傾きの中間値を使い、接線近似の式を作ります。

$$\sqrt{1^2+a} < 1+\frac{a}{2} \qquad \sqrt{2^2+a} < 2+\frac{a}{4}$$

$$\sqrt{3^2+a} < 3+\frac{a}{6}$$

3

$\sqrt{5}$ について　$5 = 2^2+1$

$$2+\frac{1}{4} > \sqrt{2^2+1} > 2+\frac{1}{5}$$

↓　2乗すると　↓

5.0625　4.84

$\sqrt{10}$ について　$10 = 3^2+1$

$$3+\frac{1}{6} > \sqrt{3^2+1} > 3+\frac{1}{7}$$

↓　↓

$10.02\dot{7}$　9.87755……

4

立方根の場合

$y = \sqrt[3]{x} \qquad x \geqq 0$

x	0	1	8	27	64	125
y	0	1	2	3	4	5

傾き　1/1　1/7　1/19　1/37　1/61

（中間値）　1/4　1/13　1/28　1/49

$\sqrt[3]{2}$　$1+\frac{1}{4}$　3乗すると　1.953125

2より小さいので補正します。

$1+\frac{1}{3}$　3乗すると　2.370370367

$\sqrt[3]{9}$　$2+\frac{1}{13}$　3乗すると　8.959035034

9より小さいので補正します。

$2+\frac{1}{12}$　3乗すると　9.042245365

$2+\frac{1}{11}$　3乗すると　9.141247169

$1+\frac{1}{3} > \sqrt[3]{2} > 1+\frac{1}{7}$

↓ 3乗すると ↓

2.370370367 1.492711366

$1+\frac{1}{4}$ の場合は 1.953125

3つの中で一番精度が良くなります。

$1+\frac{1}{12} > \sqrt[3]{9} > 1+\frac{1}{19}$

↓ 3乗すると ↓

9.042245365 8.648345227

精度を良くするには?

$1+\frac{1}{4}$

の 4 に注目します。

$4 = 3+1$

$\sqrt[3]{1.1}$ の場合

$1+\frac{0.1}{3} = 1+\frac{1}{30}$ 3乗すると 1.103370369

$1+\frac{1}{31}$ 1.099929506

$1+\frac{1}{32}$ 1.096710204

$\sqrt[3]{1.2}$ の場合

$1+\frac{0.2}{3} = 1+\frac{2}{30}$ 1.213629626

$1+\frac{2}{31}$ 1.206303916

$1+\frac{2}{32}$ 1.19946289

$1+\frac{2}{33}$ 1.193060074

$\sqrt[3]{1+a} \fallingdotseq 1+\frac{a}{3+a}$

$\sqrt[3]{28}$ の場合 $28 = 3^3+1$

$3+\frac{1}{27}$ 3乗すると 28.01239648

$3+\frac{1}{28}$ 27.97581083

$3+\frac{1}{29}$ 27.94177701

$\frac{1}{27}$ と $\frac{1}{28}$ の間を調べます。

$\frac{1}{27} = \frac{3}{81}$

$3+\frac{3}{82}$ 27.99990022

$3+\frac{3}{83}$ 27.89770869

$\sqrt[3]{28} \fallingdotseq 3+\frac{3}{82}$

$\frac{3}{82} = \frac{1}{27+\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{9}$ の場合にあてはめると

$2+\frac{1}{12+\frac{1}{2}} = 2+\frac{2}{25}$

3乗すると 8.998912

$a+\frac{x}{3a^2} > \sqrt[3]{a^3+x} > a+\frac{a\cdot x}{3a^3+x}$

$\sqrt[12]{2}$ の近似値は $12 = 2\times 2\times 3$

2 √ √ = 1.18920715

−1 = ÷ 3 = + 1 =

1.06306903833

2 √ √ − 1 = M+ + 3 = ÷ MRC

= ÷ = + 1 =

1.059327321 23

2 ^ (1 ÷ 12) = 1.059463094