武田　利一　様

2010.11.24

林　邦英

久留島さんの平方零約術は数表づくりと表の分析によって創られたと思います。

16 = 5 × 3 + 1
　 = 　× 　+
　 = 　× 　+
10 = 1 × 9 + 1

この計算方法の完成が核心です。10年前を思い出します。

1
1 1
1 2
1 3 2
1 6 6
1 7 12 6
1 14 36 24

変形パスカル三角形による計算法の発見は、階差0項数列を利用してM乗数の数列の和を求める式を求める方法をつくる上で重要な位置をもちます。共通点は数表づくりと表の分析です。久留島さんが「強弱」を重視したこと。ここに平方零約術が生まれたカギがあります。私の場合は「数列の0項」に着目したことにあります。この視点に立ち、数表作りと表の分析を行なえば私の10年前の方法はだれでもみつけることができるものです。

　久留島さんの回文構造の利用法について、まだ書くことができません。久留島さんのすごさをあらためて思います。

　レポート「平方零約術を説明する」を同封します。

　今年も残すところ、38日になりましたが正月は私にとってずっと遠くにあります。

平方根の小数による近似値を分数にする方法

$\sqrt{67}$ について　（12桁の電卓を使って）

67 √　　8.18535277187

− 8 ＝　0.18535277187

　÷ ＝　5.39511759069

− 5 ＝　0.39511759069

　÷ ＝　2.53089212822

− 2 ＝　÷ ＝

求められた数値は

8，5．2，1．1，7，1，1．2．5．16．5

×2の規則性を使い

$\sqrt{67}=8+(5,2,1,1,7,1,1,2,5,16)_n$

小数による近似値を使い，ユークリッド互除法を利用して平方根を連分数の形にする方法です。

8桁の電卓を使った場合を下に示します。

8，5，2，1，1，7，1，1，2，9，1，3

12桁の電卓の場合は 8×2＝16 である16が現われましたので $\sqrt{67}$ の構造を決めることができましたが 8桁電卓の場合では ×2の規則性を使うことができません。

回文構造を利用します。

$\boxed{8},\ \underline{5,2,1,1,}\textcircled{7},\underline{1,1,2,}\ 9,1,3$

$\boxed{8},\ \underline{5,2,1,1,}\textcircled{7},\underline{1,1,2,5,}\boxed{16}$

という形を予想することができます。

分数になおします。

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1/5 & 1/2 & 1/1 & 1/1 & 1/7 & 1/1 \\ \frac{1}{0} & \frac{8}{1} & \frac{41}{5} & \frac{90}{11} & \frac{131}{16} & \frac{221}{27} & \frac{1678}{205} & \frac{1899}{232} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1/1 & 1/2 & 1/5 \\ \frac{3577}{437} & \frac{9053}{1106} & \frac{48842}{5967} \end{array}$$

計算の方法は

$$\begin{array}{cccc} & & 1/5 & 1/2 \\ \frac{1}{0} & \frac{8}{1} & \frac{41}{5} & \frac{90}{11} \end{array}$$

1 × 1 ＋ 8 × 5 ＝ 41

8 × 1 ＋ 41 × 2 ＝ 90

0 × 1 ＋ 1 × 5 ＝ 5

1 × 1 ＋ 5 × 2 ＝ 11

$\frac{48842}{5967}$

を調べます。　ペル方程式を使います。

$48842^2-67\times5967^2=1$

$\sqrt{67}$ の構造が決まりました。

$\sqrt{67}=8+(5,2,1,1,7,1,1,2,5,16)_n$

$$\sqrt{67}=8+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{5+}}}}}}}}}}}$$

12 桁の数字を用いて ユークリッド互除法を使って求めた数値

$\sqrt{2}$ 1, 2, 2, 2, 2,
$\sqrt{3}$ 1, 1, 2, 1, 2,
$\sqrt{4}$ 2
$\sqrt{5}$ 2, 4, 4, 4, 4,
$\sqrt{6}$ 2, 2, 4, 2, 4,
$\sqrt{7}$ 2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4,
$\sqrt{8}$ 2, 1, 4, 1, 4,
$\sqrt{9}$ 3
$\sqrt{10}$ 3, 6, 6, 6, 6,
$\sqrt{11}$ 3, 3, 6, 3, 6,
$\sqrt{12}$ 3, 2, 6, 2, 6,
$\sqrt{13}$ 3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1,
$\sqrt{14}$ 3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6,
$\sqrt{15}$ 3, 1, 6, 1, 6,

$\sqrt{16}$ 4
$\sqrt{17}$ 4, 8, 8, 8,
$\sqrt{18}$ 4, 4, 8, 4, 8
$\sqrt{19}$ 4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2,
$\sqrt{20}$ 4, 2, 8, 2, 8,
$\sqrt{21}$ 4, 1, 1, 2, 1, 1, 8, 1,
$\sqrt{22}$ 4, 1, 2, 4, 2, 1, 8, 1,
$\sqrt{23}$ 4, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1,
$\sqrt{24}$ 4, 1, 8, 1, 8,
$\sqrt{25}$ 5
$\sqrt{26}$ 5, 10, 10, 10,
$\sqrt{27}$ 5, 5, 10, 5, 10,
$\sqrt{28}$ 5, 3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10,
$\sqrt{29}$ 5, 2, 1, 1, 2, 10, 2, 1, 1, 2, 10,
$\sqrt{30}$ 5, 2, 10, 2, 10,

$\sqrt{2} = 1 + (2)_{2n}$
$\sqrt{3} = 1 + (1, 2)_{n}$
$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{5} = 2 + (4)_{2n}$
$\sqrt{6} = 2 + (2, 4)_{n}$
$\sqrt{7} = 2 + (1, 1, 1, 4)_{n}$
$\sqrt{8} = 2 + (1, 4)_{n}$
$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{10} = 3 + (6)_{2n}$
$\sqrt{11} = 3 + (3, 6)_{n}$
$\sqrt{12} = 3 + (2, 6)_{n}$
$\sqrt{13} = 3 + (1, 1, 1, 1, 6)_{2n}$
$\sqrt{14} = 3 + (1, 2, 1, 6)_{n}$
$\sqrt{15} = 3 + (1, 6)_{n}$

$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{17} = 4 + (8)_{2n}$
$\sqrt{18} = 4 + (4, 8)_{n}$
$\sqrt{19} = 4 + (2, 1, 3, 1, 2, 8)_{n}$
$\sqrt{20} = 4 + (2, 8)_{n}$
$\sqrt{21} = 4 + (1, 1, 2, 1, 1, 8)_{n}$
$\sqrt{22} = 4 + (1, 2, 4, 2, 1, 8)_{n}$
$\sqrt{23} = 4 + (1, 3, 1, 8)_{n}$
$\sqrt{24} = 4 + (1, 8)_{n}$
$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{26} = 5 + (10)_{2n}$
$\sqrt{27} = 5 + (5, 10)_{n}$
$\sqrt{28} = 5 + (3, 2, 3, 10)_{n}$
$\sqrt{29} = 5 + (2, 1, 1, 2, 10)_{2n}$
$\sqrt{30} = 5 + (2, 10)_{n}$

平方零約術を説明する

$\sqrt{67}$ の場合

① $67 = 8^2 + 3$　（甲）

② $\frac{8}{1}$

③ $2 \times 8 = 5 \times 3 + 1$　（乙）

④ $2 \times 8 - 1 = 15$

⑤ $\frac{15 \times 1 + 3}{3} = 6$

⑥ $\frac{8 \times 5 + 1}{1 \times 5} = \frac{41}{5}$

⑦ $15 = 2 \times 6 + 3$　（丙）

⑧ $2 \times 8 - 3 = 13$

⑨ $\frac{13 \times 3 + 3}{6} = 7$

⑩ $\frac{41 \times 2 + 8}{5 \times 2 + 1} = \frac{90}{11}$

① $67 = 8^2 + 3$

67を平方数と剰余数に分けることから計算は始まります。

$$\sqrt{67} \fallingdotseq 8 + \frac{3}{2 \times 8} = 8 + \frac{3}{16}$$

上の式の中の 3 と 16 は計算の中で何度も使われます。

② $\frac{8}{1}$

一番目の分数は ① の式の中の 8^2 の 8 を使うことで求められます。

③ $2 \times 8 = 5 \times 3 + 1$

$2 \times 8 = 16$ を $5 \times 3 + 1$ に分解します。

実　段数　強弱の絶対値　段余

$16 = 5 \times 3 + 1$

強弱は交互に表われるので絶対値だけ求めれば計算をすすめることができます。（計算の省力化）

16 と 3 は ① の式で求められます。

この式の形は、数表の分析によって生まれました。

$8 + \frac{3}{16} = \frac{131}{16}$

$131 = 8 \times 16 + 3$

$16 = 5 \times 3 + 1$

ユークリッド互除法を行うことで同じ式が出てきました。

$\sqrt{67}$ の小数の近似値をユークリッド互除法を使い段数を求め分数と強弱をつけ加えた表をつくります。

段数		8	⑤	2	1	①
分子 分母	$\frac{1}{0}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{41}{5}$	$\frac{90}{11}$	$\frac{131}{16}$	$\frac{221}{27}$
強弱		$\boxed{\text{弱3}}$	強6	弱7	$\boxed{\text{強9}}$	弱2

$16 = 5 \times 3 + 1$ の式の中の

5 は段数　3 は弱3 に対応しています。

$2120 = 8 \times 259 + 48$

$259 = 5 \times 48 + 19$

$48 = 2 \times 19 + 10$

$19 = 1 \times 10 + 9$

$10 = 1 \times 9 + 1$

1 と 9 がみつかりました。

$\frac{2120}{259}$ の分数は

$$8+\frac{3}{16+\frac{3}{16}}$$

によって作られたものです。

$$\begin{array}{cccc} & & 3/16 & 3/16 \\ \frac{1}{0} & \frac{8}{1} & \frac{131}{16} & \frac{2120}{259} \end{array}$$

$8\times3+131\times16=2120$

$1\times3+16\times16=259$

$$\sqrt{67}=8+\cfrac{3}{16+\cfrac{3}{16+\cfrac{3}{16+}}}$$

の形の連分数です。久留島さんは平方根を連分数で表わす場合に２つの方法があることを知っていたと思います。

ユークリッドの除法を使わずに、段数と強弱の絶対値を求める方法は

$16 = 5 \times 3 + 1$

$1 = 2 \times 6 + [\ \ ]$

$[\ \ ] = 1 \times 7 + [\ \ ]$

$10 = 1 \times 9 + 1$

上の表を完成させることで求められます。

	実		段数		強弱の絶対値		段余
	16	=	5	×	3	+	1
16-1=	15	=	2	×	6	+	3
15-3=	13	=	1	×	7	+	6
15-5=	10	=	1	×	9	+	1

実と段余を加えることで、計算方法の形を決めることができました。

④ $2\times8-1=15$

段余を使い実を決めます。⑦で使います。

⑤ $\frac{15\times1+3}{3}=6$

強弱の絶対値を求める式です。

$67=8^2+3$

	分子	分母	強弱	実	段数	段余	
甲	1	8	原3	16			
乙	5	41	強6	15	5	1	+3
丙	11	90	弱7	13	2	3	+3
丁	16	131	強9	10	1	6	+3

この表を観察することで⑤の式が生まれました。

$3\times6=15\times1+3$

$6\times7=13\times3+3$

$7\times9=10\times6+3$

⑥ $\frac{8\times5+1}{1\times5}=\frac{41}{5}$

２番目の分数を②の分数と段数５を使って求めます。

$$\begin{array}{ccc} & & 1/5 \\ \frac{1}{0} & \frac{8}{1} & \frac{41}{5} \end{array}$$

$1\times1+8\times5=1+40=41$

$0\times1+1\times5=0+5=5$

$$8+\frac{1}{5}=\frac{40+1}{5}=\frac{41}{5}$$

⑦ $15=2\times6+3$

④で求めた実15と⑤で求めた強弱の絶対値を使って段数２と段余３を決定します。

⑧ $2\times8-3=13$

実を決定します。

⑦ $\frac{13\times3+3}{6}=7$

強弱の絶対値を決定します。

⑨ $\frac{41\times2+8}{5\times2+1}=\frac{90}{11}$

⑦で求めた段数を使って 3番目の分数を求めます。

「学術を中心とした和算史上の人々（平山諦著）」ちくま学芸文庫）の P.268〜P.270 の公式の説明、P.270〜P.272 の $x=67$ の例を参考にしました。

久留島さんの方法は、計算の一行程で強弱と段数を同時に求めます。回文構造を積極的に利用する方法を確立することで平方零約術は完成します。

多くの具体例を分析したと思います。

久留島さんの回文構造の分析の特徴を知るために、平方根を小数で近似値を求め、ユークリッド互除法を使って分数にする方法について学んでみました。[illegible]は省略し、12桁の電卓を使って表を作りました。本当は手計算で行ない、計算量の多さを体感した方がよいと思っています。

数値を分析し、連分数（ユークリッド式連分数、正則連分数）の構造を決定することでわかることを少し書いてみます。

① 連分数の形にすることで、平方根が周期をもつ数列をもっていることがわかります。

② 周期のめじるしになるのは、最初の数を2倍した数です。×2の規則性です。

③ $\sqrt{14}$，$\sqrt{19}$，$\sqrt{21}$，$\sqrt{22}$，$\sqrt{23}$，$\sqrt{28}$，$\sqrt{29}$ の観察より回文構造があることがわかります。

④ 連分数を分数にする方法は知っていました。

⑤ 構造を決定するためにペル方程式

$$x^2-D\cdot y^2=\pm1$$

を使ったと思います。

久留島さんの分析の特徴は、強弱を使うことにあります。ペル方程式の拡張という見方もありますが、平方根を分数の形で分析する場合の基本的なものだと考えています。

P.278に安島直円さんの作った表が紹介されています。とてもわかりやすい標本だと思います。