武田 利一 様

2010・11・19

林 邦英

久留島義太さんの平方零約術をどのように説明するのかをテーマにしてみました。数学というよりは国語（日本語教育）の分野ではないかと思っています。

久留島さんの方法の特徴は、ユークリッド互除法を分解変形し、平方剰余より始め、強弱と段数を計算の一行程ごとに求め、ユークリッド式連分数に現われる回文構造を積極的に利用し、最良近似分数（ペル方程式の解）を効率的に求めることにあります。

レポートは未完成のものです。以下説明を加えます。

P.4－P.7の部分は、ユークリッド式連分数の構造決定に関する部分です。

XZの規則性の使えない場合の例です。

P.12の段余の右に原3を利用して＋3を書き加えて表を観察します。　関係を求

める方法がわかります。
実と強弱が決まると段数と段余が決まります。
P. 10－P. 11に示した計算の行程を、ことばを使って表現するとどうなるかと考えています。
久留島さんの方法を有効活用するためにはユークリッド式連分数に現われる回文構造の性質について知っている必要があります。久留島さんは、いくつかの具体例を分析し、規則性を求めたのだと思います。
P. 12に〔強9，弱2，強9〕の場合の例を示しましたが、あらためて久留島さんのすばらしさを体感しました。

寒くなりました。お体に気をつけてください。
読み書きそろばん（計算）は実学の基本だと考えています。

平方根を連分数を使って表現する場合の2つの方法を区別するために、ボンベリ式連分数とユークリッド式連分数と呼ぶことにしました。

ボンベリ式連分数はアラビアの方法を使って簡単に作ることができます。原形ペル方程式のAの規則性を利用し、精度を良くすることができます。

ユークリッド式連分数は、ボンベリ式連分数によって求められた近似分数または、小数表示された近似値を利用し、ユークリッド互除法を使って求めるもので、最良近似分数(ペル方程式の解)を求めることができます。正則連分数と呼ばれているものです。構造決定をする簡単な方法は、XZの規則性を利用する方法です。循環部の小さい場合は使えますが、循環部の大きい場合は、回文構造を利用することになります。原形ペル方程式のAを求める必要があります。

久留島さんの平方零約術を読み解くために

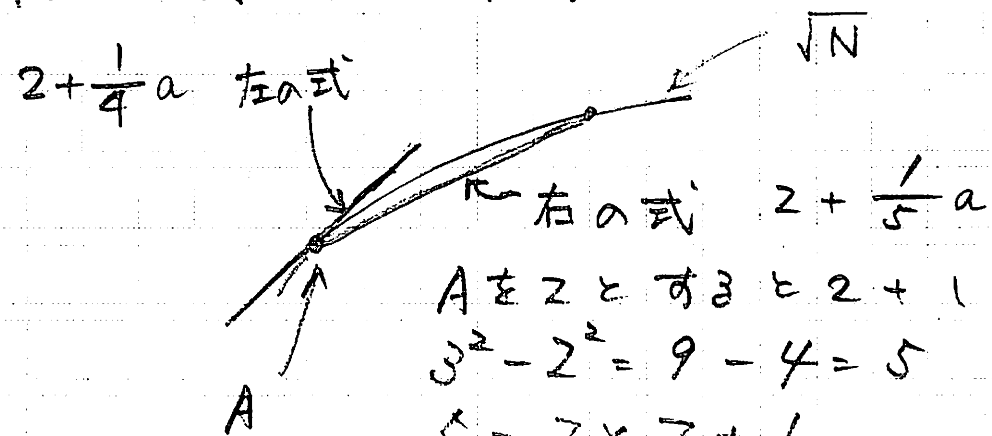
平方根に関する多くの知識を必要とします。

鳴海風さんは「美しき魔方陣—久留島義太見参！」（小学館文庫）の中で詰将棋作家、久留島喜内を紹介しています。詰将棋の作品として、平方零約術を見ると、なるほどと思います。

平方剰余という簡単な方法から計算を始めています。初期値 a のとり方が簡単です。アラビアの方法の左半分です。

$$A+\frac{a}{2A} > \sqrt{A^2+a} > A+\frac{a}{2A+1}$$

接線法においても使われます。右半分は区間を一次式で近似した式です。



Aを2とすると $2+1=3$

$3^2-2^2=9-4=5$

$5=2\times 2+1$

読み書きそろばん（計算）は実学の基本だと考えています。

読む　—　調べる
書く　—　考える
計算　—　判断の基準を求める

このように言えないかと考えています。

私が「学術を中心とした和算史上の人々」（平山諦著）を何度もとりあげるのには理由があります。231ページに示されている、平山さんの考え方がきにいっているからです。「このことは和算の欠点でもあり、長所でもあった。日本人の計算力にすぐれた点は大いに延ばすべきである。」

「異説　数学者列伝　森毅著」（ちくま学芸文庫2001年）の212ページに次のように書かれています。

『理科ばなれなんてのも、たいして心配していない。それより、いったん理系になったら理系一筋、いったん文系となったら文系一筋、そちらの方がよほど心配だ。人生の物語と

してなら、いろいろ変わったほうが絶対に面白い。（略）…人間は化けることがあるのを前提にしなければ、教育の概念自体が成立しない。」

数学は理系なのか文系なのかどちらでしょうか。

理学部 ─ 数学科

文学部 ─ 哲学科 ─ 数学教室

私はどちらでもあるように思います。

まとまらない内容になりもうしわけありません。

No. ....
Date

久留島義太さんの平方零約術 について
(〜1757)

平山諦さん(1904〜1998)の書かれた「算術を中心とした和算史上の人々」(1965年に富士短期大学出版部より刊行され、2008年に ちくま学芸文庫より再発行された。)の第3章 §9 (267ページより278ページ)を参考にしました。ありがとうございます。

$\sqrt{67}$ の場合 の例

① $67 = 8^2 + 3$ から始めています。
平方剰余

② $\frac{8}{1}, \frac{41}{5}, \frac{90}{11}, \frac{131}{16}, \frac{221}{27}, \frac{1678}{205}$
ニュートン式連分数

の分数列を求めています。

③ 強弱を利用して ②の結果より

$\frac{48842}{5967}$　　ペル方程式の最小解

を求めています。

③の分数を求める方法の中で、もっとも計算量の少なく効率的な計算方法です。

③の分数 の特徴 は

$48842^2 - 67 \times 5967^2 = 1$　(強弱)
ペル方程式

または

$48842^2 - 1 = 67 \times 5967^2$　(A)
原形ペル方程式

となることにあります。

$$\frac{\frac{48842}{5967} + \frac{67 \times 5967}{48842}}{2} = \frac{4771081927}{582880428}$$

$$\frac{\frac{4771081927}{582880428} + \frac{67 \times 582880428}{4771081927}}{2} =$$

この計算をくり返し行っても 分子と分母の上の特徴は変わりません。
ニュートン式反復法

直数より 、約

$\frac{1}{2 \times 分子 \times 分母}$

だけ大きくなります。

江戸時代の一般的な方法は、まず 開平法を使って小数で近似値を求め零約術(ユークリッド互除法)を使って分数に直す方法だったと思います。
(P.268　8行目)

久留島さんは

$67 = 8^2 + 3$ から始めています。
平方剰余

$\sqrt{67} \fallingdotseq 8 + \frac{3}{16}$　アラビアの方法

これより 下の連分数 が生まれます。
ボンベリ式連分数

$$\sqrt{67} = 8 + \cfrac{3}{16 + \cfrac{3}{16 + \cfrac{3}{16 + \cdots}}}$$

一般の分数に直します。

3/16　3/16　3/16

$\frac{1}{0}$　$\frac{8}{1}$　$\frac{131}{16}$　$\frac{2120}{259}$　$\frac{34313}{4192}$

② の分数列とは異なるものです。

作り方は簡単です。

3/16　3/16　3/16　3/16

$\frac{1}{0}$　$\frac{8}{1}$　$\frac{131}{16}$　$\frac{2120}{259}$

$$\frac{1 \times 3 + 8 \times 16}{0 \times 3 + 1 \times 16} = \frac{131}{16}$$

$$\frac{8 \times 3 + 131 \times 16}{1 \times 3 + 16 \times 16} = \frac{2120}{259}$$

分子と分母の関係は

$(分子)^2 + A = 67 \times (分母)^2$ とすると

$\frac{1}{0}$　$\frac{8}{1}$　$\frac{131}{16}$　$\frac{2120}{259}$　$\frac{34313}{4192}$

(A)　-1　$+3$　-9　$+27$　-81

Aを使って精度を良くする方法を示します。

$$\frac{34313}{4192} + \frac{-81}{2 \times 34313 \times 4192} =$$

この分数列を②の分数列に直します。

ユークリッド互除法を使います。（零約術）

$\frac{34313}{4192}$

を使います。

$34313 = 8 \times 4192 + 777$

$4192 = 5 \times 777 + 307$

$777 = 2 \times 307 + 163$

$307 = 1 \times 163 + 144$

$163 = 1 \times 144 + 19$

$144 = 7 \times 19 + 11$

$19 = 1 \times 11 + 8$

$11 = 1 \times 8 + 3$

8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1

の数列を使います。

ユークリッド式連分数

8	1/5	1/2	1/1	1/1	1/7

$\frac{1}{0}$ $\frac{8}{1}$ $\frac{41}{5}$ $\frac{90}{11}$ $\frac{131}{16}$ $\frac{221}{27}$ $\frac{1678}{205}$

$\frac{1\times1+8\times5}{0\times1+1\times5} = \frac{41}{5}$

$\frac{8\times1+41\times2}{1\times1+5\times2} = \frac{90}{11}$

$\frac{131\times1+221\times7}{16\times1+27\times7} = \frac{1678}{205}$

1/1 1/1

$\frac{1899}{232}$ $\frac{3577}{437}$

この続きを求めるためには（A）を求める必要があります。原形ペル方程式

	8	5	2	1	1	7	1	1
$\frac{1}{0}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{41}{5}$	$\frac{90}{11}$	$\frac{131}{16}$	$\frac{221}{27}$	$\frac{1678}{205}$	$\frac{1899}{232}$	$\frac{3577}{437}$
(A)	+3	−6	+7	−9	+2	−9	+7	−6

回文構造を利用して

1/1 1/1 1/2 1/5

$\frac{1899}{232}$ $\frac{3577}{437}$ $\frac{9053}{1106}$ $\frac{48842}{5967}$

$\sqrt{67} = 8 + (5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16)_n$

回文構造を積極的に使う方法です。

久留島さんは

$\frac{1678}{205}$

まえの結果より

$\frac{48842}{5967}$

を求めています。

強弱を計算の「一行程」ごとに求めているので回文構造を使う上でムダがありません。

久留島さんの方法の特徴は、強弱と段数を計算の一行程ごとに求め、回文構造を積極的に利用することにあります。

平方根を連分数で表わす２つの方法を知っていたと思います。

$\frac{131}{16}$ を使って

$131 = 8 \times 16 + 3$

$16 = 5 \times 3 + 1$

$\frac{2120}{259}$ を使って

$2120 = 8 \times 259 + 48$

$259 = 5 \times 48 + 19$

$48 = 2 \times 19 + 10$

$19 = 1 \times 10 + 9$

$10 = 1 \times 9 + 1$

$$16 = 5 \times 3 + 1$$
$$= \quad \times \quad +$$
$$= \quad \times \quad +$$
$$10 = 1 \times 9 + 1$$

ここから始まったと思うからです。

$$16 = 5 \times 3 + 1$$
$$= 2 \times 6 +$$
$$= 1 \times 7 +$$
$$10 = 1 \times 9 + 1$$

実		段数		強弱		段余
16	=	5	×	3	+	1
15	=	2	×	6	+	3
13	=	1	×	7	+	6
10	=	1	×	9	+	1

久留島さんの計算方法を示します。

$$67 = 8^2 + 3 \qquad (甲)$$

$$\frac{8}{1}$$

$$2 \times 8 = 5 \times 3 + 1 \qquad (乙)$$

$$2 \times 8 - 1 = 15$$

$$\frac{15 \times 1 + 3}{3} = 6$$

$$\frac{8 \times 5 + 1}{1 \times 5} = \frac{41}{5}$$

$$15 = 2 \times 6 + 3 \qquad (丙)$$

$$2 \times 8 - 3 = 13$$

$$\frac{13 \times 3 + 3}{6} = 7$$

$$\frac{41 \times 2 + 8}{5 \times 2 + 1} = \frac{90}{11}$$

$$13 = 1 \times 7 + 6 \qquad (丁)$$

$$2 \times 8 - 6 = 10$$

$$\frac{10 \times 6 + 3}{7} = 9$$

$$\frac{90 \times 1 + 41}{11 \times 1 + 5} = \frac{131}{16}$$

$$10 = 1 \times 9 + 1 \qquad (戊)$$

$$2 \times 8 - 1 = 15$$

$$\frac{15 \times 1 + 3}{9} = 2$$

$$\frac{131 \times 1 + 90}{16 \times 1 + 11} = \frac{221}{27}$$

このように計算されます。

(P.270 〜 P.271)

$$67 = 8^2 + 3$$

	分母	分子	強弱	実	段数	段余
甲	1	8	原3	16		
乙	5	41	強6	15	5	1
丙	11	90	弱7	13	2	3
丁	16	131	強9	10	1	6
戊	27	221	弱2	15	1	1
己	205	1678	強9	15	7	1

久留島さんはここまでの計算結果を使って

$$\frac{221 \times 2}{2} = 221$$

$$221 \times 27 = 5967$$

$$221 \times 221 + 1 = 48842$$

$$\frac{48842}{5967}$$

を求めています。(P.272 〜 P.273)