武田　利一　様

2010．3．27

林　邦英

最新のレポートを読ませていただきました。ありがとうございます。

3月14日に西三数学サークルの合宿研究会で発表の時間をいただきました。「階差0項数列を使ってM乗数の数列の和を求める」をテーマとしました。質問に答えながら考えたことは、「なぜ数列の0項を重視するのか」という視点でした。10年前を思い出してみました。「階差0項数列について」の1〜4の表から始まりました。上と下の表のちがいです。「幻の0番法」は下の表より生まれています。なぜ「0項」を問題にするのかについて書いてみました。

P.6　右と左のどちらを使うのか

右を使うと、P.7の規則性がみつかりました。

P.8において、基準となる階差0項数列が

あらわれました。P.9〜P.12において台形数の場合についての例を示しました。

3月14日の午後に、竹島水族館（蒲郡市）へ行きました。25年ぶりです。企画展に関心をもちました。「工夫をすること」。

3月22日に清洲城の見学に行きました。織田　信長さんのすぐれていたことは何なのだろうかという視点をいただきました。

No.
Date 2010.3.27

階差0項数列について

N^M（Mは1,2,3）の数列の階差の表

M = 1 の場合

①	②	③	④	⑤	⑥	
1	2	3	4	5	6	M-1-0
1	1	1	1	1		M-1-1
0	0	0	0			

M = 2 の場合

①	②	③	④	⑤	⑥	
1	4	9	16	25	36	M-2-0
3	5	7	9	11		M-2-1
2	2	2	2			M-2-2
0	0	0				

M = 3 の場合

①	②	③	④	⑤	⑥	
1	8	27	64	125	216	M-3-0
7	19	37	61	91		M-3-1
12	18	24	30			M-3-2
6	6	6				M-3-3
0	0					

N^M（Mは1,2,3）の和の数列の階差の表

M = 1 の場合

①	②	③	④	⑤	⑥	
1	3	6	10	15	21	C-0
2	3	4	5	6		C-1
1	1	1	1			C-2
0	0	0				

M = 2 の場合

①	②	③	④	⑤	⑥	
1	5	14	30	55	91	C-0
4	9	16	25	36		C-1
5	7	9	11			C-2
2	2	2				C-3
0	0					

M = 3 の場合

①	②	③	④	⑤	⑥	
1	9	36	100	225	441	C-0
8	27	64	125	216		C-1
19	37	61	91			C-2
18	24	30				C-3
6	6					C-4
0						

N^M（Mは1,2,3）の数列の階差の表

M = 1 の場合

⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	
0	1	2	3	4	5	6	M-1-0
1	1	1	1	1	1		M-1-1
0	0	0	0	0			

M = 2 の場合

⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	
0	1	4	9	16	25	36	M-2-0
1	3	5	7	9	11		M-2-1
2	2	2	2	2			M-2-2
0	0	0	0				

M = 3 の場合

⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	
0	1	8	27	64	125	216	M-3-0
1	7	19	37	61	91		M-3-1
6	12	18	24	30			M-3-2
6	6	6	6				M-3-3
0	0	0					

N^M（Mは1,2,3）の和の数列の階差の表

M = 1 の場合

⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	
0	1	3	6	10	15	21	C-0
1	2	3	4	5	6		C-1
1	1	1	1	1			C-2
0	0	0	0				

M = 2 の場合

⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	
0	1	5	14	30	55	91	C-0
1	4	9	16	25	36		C-1
3	5	7	9	11			C-2
2	2	2	2				C-3
0	0	0					

M = 3 の場合

⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	
0	1	9	36	100	225	441	C-0
1	8	27	64	125	216		C-1
7	19	37	61	91			C-2
12	18	24	30				C-3
6	6	6					C-4
0	0						

$\sum_{K=1}^{N} K^M$ M乗数の数列の和について

N^M の和 と N^M (Mは1,2,3) の数列の階差の表

M = 1 の場合

0 1 2 3 4 5 6

0 1 3 6 10 15 21

(0) 1 2 3 4 5 6

(1) 1 1 1 1 1

(0) 0 0 0 0

M = 2 の場合

0 1 2 3 4 5 6

0 1 5 14 30 55 91

(0) 1 4 9 16 25 36

(1) 3 5 7 9 11

(2) 2 2 2 2

(0) 0 0 0

M = 3 の場合

0 1 2 3 4 5 6

0 1 9 36 100 225 441

(0) 1 8 27 64 125 216

(1) 7 19 37 61 91

(6) 12 18 24 30

(6) 6 6 6

(0) 0 0

一番左の数字の列を階差0項数列という

N, N^2, N^3 の和の場合

( )の数字は N, N^2, N^3 の場合

階差 1 項数列	階差 0 項数列
1 1	1
1 2 1	1 1
1 3 2	1 2
1 4 5 2	1 3 2
1 7 12 6	1 6 6
1 8 19 18 6	1 7 12 6

基準となる階差0項数列の規則性

1	N
1 1	N の和
(×1)(×2)	
1 2	N^2
1 3 2	N^2 の和
(×1)(×2)(×3)	
1 6 6	N^3
1 7 12 6	N^3 の和
(×1)(×2)(×3)(×4)	
1 14 36 24	N^4
1 15 50 60 24	N^4 の和
(×1)(×2)(×3)(×4)(×5)	
1 30 150 240 120	N^5
1 31 180 390 360 120	N^5 の和
(×1)(×2)(×3)(×4)(×5)(×6)	
1 62 540 1560 1800 720	N^6

変型パスカル三角形

階差数列の分析 (M = 4 の場合)

0	1	2	3	4	5	6	
0	1	16	81	256	625	1296	M−4−0
1	15	65	175	369	671		M−4−1
14	50	110	194	302			M−4−2
36	60	84	108				M−4−3
24	24	24					M−4−4
0	0						

M−4−1 の一般項は

$$(N+1)^4 - N^4 = 4N^3 + 6N^2 + 4N + 1$$

$4N^3 + 6N^2 + 4N + 1$ M−4−1

$12N^2 + 24N + 14$ M−4−2

$24N + 36$ M−4−3

24 M−4−4

N^2 の係数は $6 \times 1 - 6 \times 2$

N の係数は $4 \times 1 - 4 \times 6 - 4 \times 6$

定数 は $1 \times 1 - 1 \times 14 - 1 \times 36 - 1 \times 24$

台形数　D(1, 3, 5)-n について

0 1 3 5
1 4 8 5
1 5 12 13 5
1 6 17 25 18 5
1 7 23 42 43 23 5
1 8 30 65 85 66 28 5

D(1, 3, 5)-1

1, 4, 12, 25, 43, 66

D(1, 3, 5)-2

1, 5, 17, 42, 85, 151

D(1, 3, 5)-3

1, 6, 23, 65, 150, 301

D(1, 3, 5)-4

1, 7, 30, 95, 245, 546

D(1, 3, 5)-5

1, 8, 38, 133, 378, 924

D(1, 3, 5)-n

-n

(1) $\frac{1}{2!}\ (5N^2 - 9N + 6)$

(2) $\frac{1}{3!}\ N\ (5N^2 - 6N + 7)$

(3) $\frac{1}{4!}\ N(N+1)(5N^2 - 3N + 10)$

(4) $\frac{1}{5!}\ N(N+1)(N+2)(5N^2 + 0 + 15)$

(5) $\frac{1}{6!}\ N(N+1)(N+2)(N+3)(5N^2 + 3N + 22)$

(6) $\frac{1}{7!}\ N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)$
$(5N^2 + 6N + 31)$

(7) $\frac{1}{8!}\ N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)(N+5)$
$(5N^2 + 9N + 42)$

$(aN^2 + bN + c)$ について

$a = 5$　　$b = 3n - 12$

c は N=1 の数値を利用して求めます。

基準とする式は n=2 の場合です。

台形数　D(1, 14, 36, 24)-n について

0 1 14 36 24
1 15 50 60 24
1 16 65 110 84 24
1 17 81 175 194 108 24
1 18 98 256 369 302 132
1 19 116 354 625 671 434 156

D(1, 14, 36, 24)-1

1, 15, 65, 175, 369, 671

D(1, 14, 36, 24)-2

1, 16, 81, 256, 625, 1296

D(1, 14, 36, 24)-3

1, 17, 98, 354, 979, 2275

D(1, 14, 36, 24)-4

1, 18, 116, 470, 1449, 3724

D(1, 14, 36, 24)-5

1, 19, 135, 605, 2054, 5778

D(1, 14, 36, 24)-n

-n

(1) $\frac{1}{3!}\ (24N^3 - 36N^2 + 24N - 6)$

(2) $\frac{1}{4!}\ N\ (24N^3 + 0 + 0 + 0)$

(3) $\frac{1}{5!}\ N(N+1)\ (24N^3 + 36N^2 + 4N - 4)$

(4) $\frac{1}{6!}\ N(N+1)(N+2)$
$(24N^3 + 72N^2 + 36N - 12)$

(5) $\frac{1}{7!}\ N(N+1)(N+2)(N+3)$
$(24N^3 + 108N^2 + 96N - 18)$

(6) $\frac{1}{8!}\ N(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)$
$(24N^3 + 144N^2 + 184N - 16)$

$(aN^3 + bN^2 + cN + d)$ について

$a = 24$

$b = 36n - 72$

c, d は N=1　N=2 の数値を利用して求めます。