武田　利一　様

2010.1.14

林　邦英

埼玉県の飯島　光治さんに、村嶋　健吾さんの書かれた「パスカルの三角形の拡張」（2001年）を送っていただきました。何度も読みかえしました。私のテーマとしていることが、この論文の前の時代であることがわかりました。

今日は、一宮市博物館、名古屋市科学館、名古屋市博物館の見学に行ってきました。

小学生や中学生の見学者が多く、にぎやかでした。

連分数と級数展開

アラビアの方法から始まります。

$$A+\frac{B}{2A} > \sqrt{A^2+B} > A+\frac{B}{2A+1}$$

分数の形の進化は連分数の形にすすみました。ユークリッド互除法を利用したユークリッド式連分数へと発展しました。

$$\sqrt{A^2+B} = A+\cfrac{B}{2A+\cfrac{B}{2A+}}$$ （ボンベリ式連分数）

$$\sqrt{A^2+B} = A+\cfrac{1}{P+\cfrac{1}{Q+}}$$ （ユークリッド式連分数）

$$= A+(P, Q, R \cdots 2A)_{\infty}$$

級数展開の考え方は、十進法とむすびつくことで生まれました。

ボンベリ式連分数を使って $\sqrt{26}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{28}$ を求めます。

$$\sqrt{26} = \sqrt{5^2+1} = 5+\frac{1}{10+}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{5^2+2} = 5+\frac{2}{10+}$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{5^2+3} = 5+\frac{3}{10+}$$

		1/10	1/10	1/10	1/10		
$\frac{1}{0}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{51}{10}$	$\frac{515}{101}$	$\frac{5201}{1020}$	$\frac{52525}{10301}$		
		2/10	2/10	2/10	2/10	2/10	
$\frac{1}{0}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{52}{10}$	$\frac{530}{102}$	$\frac{5404}{1040}$	$\frac{55100}{10604}$	$\frac{561808}{108120}$	
		3/10	3/10	3/10	3/10	3/10	
$\frac{1}{0}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{53}{10}$	$\frac{545}{103}$	$\frac{5609}{1060}$	$\frac{57725}{10909}$	$\frac{594077}{112270}$	

分数を小数で表わします。

$\sqrt{26} \fallingdotseq \frac{52525}{10201} = 5.09\ 9\ 0195$

$\sqrt{27} \fallingdotseq \frac{561808}{108120} = 5.19\ 6\ 1524$

$\sqrt{28} \fallingdotseq \frac{594077}{112270} = 5.29\ 1\ 5026$

$5+0.1-0.001 \quad 9 \quad -1=-1^2$

$5+0.2-0.004 \quad 6 \quad -4=-2^2$

$5+0.3-0.009 \quad 1 \quad -9=-3^2$

小数による表現は、分数とは異なる性質を示します。

26	5.0990195
27	5.1961524
28	5.2915026
25.1	5.00998001995013
25.2	5.01996015920445
25.3	5.02991033598271

平方根の級数展開

$\sqrt{25+a}$ の表の分析より次の式を求めます。

$$5+\frac{a}{10}-\frac{a^2}{10^3}+\frac{2a^3}{10^5}-\frac{5a^4}{10^7}+\frac{14a^5}{10^9}-$$

5 を A とすると平方根の級数展開の式になります。

$$\sqrt{A^2+a}=A+\frac{a}{2A}-\frac{a^2}{(2A)^3}+\frac{2a^3}{(2A)^5}-\frac{5a^4}{(2A)^7}+\frac{14a^5}{(2A)^9}-$$

具体的な事例を利用して、式の成り立ちについて考えてみます。

$\sqrt{N}=a+b$ とし a がわかっている部分とします。

$\sqrt{N}\fallingdotseq a$

$\{(a+b)^2-a^2\}/2a=b+b^2/2a$

$\sqrt{N}\fallingdotseq a+\{(a+b)^2-a^2\}/2a$

とすることができますが $b^2/2a$ の部分が大きすぎます。

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$\frac{(a+b)^2-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}$$

② b を求めるためには $b^2/2a$ を引けばよいが、b がわからないので $b\fallingdotseq b+b^2/2a$ として計算し、誤差を打ち消す次の式を作ります。

③ $b^2/2a$ の b に $b+b^2/2a$ を代入すると

$(b^2+2b\cdot b^2/2a+b^4/(2a)^2)/2a$

$=b^2/2a+2b^3/(2a)^2+b^4/(2a)^3$

$\quad b+b^2/2a$

$-\quad b^2/2a-2b^3/(2a)^2-b^4/(2a)^3$

$b+0-2b^3/(2a)^2-b^4/(2a)^3$

④ $2b^3/(2a)^2$ の b に $b+b^2/2a$ を代入すると

$2(b^3+3b^2\cdot b^2/2a+3b\cdot b^4/(2a)^2+b^6/(2a)^3)/(2a)^2$

$=2b^3/(2a)^2+6b^4/(2a)^3+6b^5/(2a)^4+2b^6/(2a)^5$

$-2b^3/(2a)^2-b^4/(2a)^3$

$2b^3/(2a)^2+6b^4/(2a)^3+6b^5/(2a)^4+2b^6/(2a)^5$

$0\quad+5b^4/(2a)^3+6b^5/(2a)^4+2b^6/(2a)^5$

⑤ $5b^4/(2a)^3$ の b に $b+b^2/2a$ を代入すると

$5(b^4+4b^3\cdot b^2/2a+6b^2\cdot b^4/(2a)^2+4b\cdot b^6/(2a)^3+b^8/(2a)^4)/(2a)^3$

$=5b^4/(2a)^3+20b^5/(2a)^4+30b^6/(2a)^5+20b^7/(2a)^6+5b^8/(2a)^7$

$5b^4/(2a)^3+6b^5/(2a)^4+2b^6/(2a)^5$

$-5b^4/(2a)^3-20b^5/(2a)^4-30b^6/(2a)^5-20b^7/(2a)^6-5b^8/(2a)^7$

$0\quad-14b^5/(2a)^4-28b^6/(2a)^5-20b^7/(2a)^6-5b^8/(2a)^7$

⑦ 整理すると

$b-b^2/(2a)+2b^3/(2a)^2-5b^4/(2a)^3+14b^5/(2a)^4-$

⑥ $\sqrt{A^2+B}$ の式への変形

$$\sqrt{A^2+B}=A+\frac{B}{2A}-\frac{B^2}{(2A)^3}+\frac{2B^3}{(2A)^5}-\frac{5B^4}{(2A)^7}+\frac{14B^5}{(2A)^9}-$$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$\frac{(a+b)^2-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}$$

A^2+B と考えると

$B=2ab+b^2$

$B/2a=b+b^2/2a$

① の b に $B/2A$ を代入すると ⑥ の式になります。

(説明)

25より少し大きい数の平方根の数値の表の分析は、平方根を級数展開の形で表わすはじまりだと思います。

⑥の式を求めることができます。

$\sqrt{A^2+B}$ をボンベリの連分数を使って求める方が簡単です。級数展開の方法が有効になるのは立方根の場合です。

立方根の級数展開

平方根の級数展開で示した方法を立方根の場合でもたしかめてみます。

$\sqrt[3]{N} = a + b$ とし aをわかっている部分とします。

$\sqrt[3]{N} \fallingdotseq a$

$\{(a+b)^3 - a^3\}/3a^2 = b + b^2/a + b^3/3a^2$

$\sqrt[3]{N} \fallingdotseq a + \{(a+b)^3 - a^3\}/3a^2$

とすることができますが $b^2/a + b^3/3a^2$ の部分が大きすぎます。

① $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\frac{(a+b)^3 - a^3}{3a^2} = b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{3a^2}$

② bを求めるためには $b^2/a + b^3/3a^2$ を引けばよいが bがわからないので $b \fallingdotseq b + b^2/a + b^3/3a^2$ として計算し誤差をうち消す次の式を作る。

③ b^2/a のbに $b + b^2/a + b^3/3a^2$ を代入

$(b + b^2/a + b^3/3a^2)^2/a$

$= b^2/a + 2b^3/a^2 + 5b^4/3a^3 + 2b^5/3a^4 + b^6/9a^5$

$$
\begin{array}{l}
b + b^2/a + b^3/3a^2 \\
\quad - b^2/a - 2b^3/a^2 - 5b^4/3a^3 - 2b^5/3a^4 - b^6/9a^5 \\
\hline
b + 0 \quad - 5b^3/3a^2 - 5b^4/3a^3 - 2b^5/3a^4 - b^6/9a^5
\end{array}
$$

④ $5b^3/3a^2$ のbに $b + b^2/a + b^3/3a^2$ を代入すると

$5b^3/3a^2 + 15b^4/3a^3 + 60b^5/9a^4 + \cdots$

$$
\begin{array}{l}
-5b^3/3a^2 - 5b^4/3a^3 - 2b^5/3a^4 - b^6/9a^5 \\
\;\;5b^3/3a^2 + 15b^4/3a^3 + 60b^5/9a^4 + \\
\hline
\;\;0 \quad + 10b^4/3a^3 + 54b^5/9a^4 +
\end{array}
$$

⑤ 整理すると

$b - b^2/a + 5b^3/3a^2 - 10b^4/3a^3 +$

⑥ $\sqrt[3]{A^3+B}$ の形への変形

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\frac{(a+b)^3 - a^3}{3a^2} = b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{3a^2}$

$A^3 + B$ とおくと

$B = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\frac{B}{3A^2} = b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{3a^2}$

⑤ の b に $B/3A^2$ を代入すると

$\sqrt[3]{A^3+B} = A + \frac{B}{3A^2} - \frac{B^2}{9A^5} + \frac{5B^3}{81A^8} - \frac{10B^4}{243A^{11}} +$

$\sqrt[3]{9}$ を求める

$9 = 2^3 + 1 \quad A = 2,\ B = 1$

$\sqrt[3]{9} = 2 + \frac{1}{3\times2^2} - \frac{1}{9\times2^5} + \frac{5}{81\times2^8} - \frac{10}{243\times2^{11}} +$

$= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \frac{5}{20736} - \frac{10}{497664} +$

$= 2.0800822$

3乗すると 8.9999788

÷9 = ÷ = −1 = ÷3 = +1 = 1.0000008

× 2.0800822 = 2.0800838

3乗すると 8.9999996

級数展開の係数を簡単に求める方法

平方根の場合は

$$\sqrt{A^2+B} = A + \frac{B}{2A} - \frac{B^2}{(2A)^3} + \frac{2B^3}{(2A)^5} - \frac{5B^4}{(2A)^7} + \frac{14B^5}{(2A)^9} - \frac{x_1 \cdot B^6}{(2A)^{11}} + \frac{x_2 \cdot B^7}{(2A)^{13}} - \cdots$$

立方根の場合は

$$\sqrt[3]{A^3+B} = A + \frac{B}{3A^2} - \frac{B^2}{9A^5} + \frac{5B^3}{81A^8} - \frac{10B^4}{243A^{11}} + x_1 \cdot \frac{B^5}{A^{14}} - x_2 \cdot \frac{B^6}{A^{17}} + \cdots$$

と考えることができます。

パスカルの三角形の「隙間」を読みます。

0	0	0	0	1 $\Leftarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$		$(a+b)^0$
0	0	0	0	1	1	$(a+b)^1$
0	0	0	1	2	1	$(a+b)^2$
0	0	1	3	3	1	$(a+b)^3$
0	1	4	6	4	1	$(a+b)^4$
1	5	10	10	5	1	$(a+b)^5$
f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	

f_1　1

f_2　N

f_3　$\frac{1}{2} N(N-1)$

f_4　$\frac{1}{6} N(N-1)(N-2)$

f_5　$\frac{1}{24} N(N-1)(N-2)(N-3)$

f_6　$\frac{1}{120} N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)$

f_7　$\frac{1}{720} N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)$

Nに1/3を代入すると

$$\sqrt[3]{A^3+B} = A + \frac{B}{3A^2} - \frac{B^2}{9A^5} + \frac{5B^3}{81A^8} - \frac{10B^4}{243A^{11}} + \frac{22B^5}{729A^{14}} - \frac{154B^6}{6561A^{17}} + \frac{374B^7}{19683A^{20}} - \cdots$$

Nに1/5を代入すると

1

$1/5$

$1/2 \cdot 1/5 \cdot (1/5 - 1) = 1/2 \cdot 1/5 \cdot (-4/5) = -2/25$

$1/6 \cdot 1/5 \cdot (1/5-1) \cdot (1/5-2) + 1/6 \cdot 1/5 \cdot (-4/5) \cdot (-9/5) = 6/125$

$$\sqrt[5]{A^5+B} = A + \underset{(4=5-1)}{\frac{B}{5A^4}} - \underset{(9=4+5)}{\frac{2B^2}{25A^9}} + \underset{(14=9+5)}{\frac{6B^3}{125A^{14}}} - \cdots$$

$2^5+2=34$　$A=2$, $B=2$

$$\sqrt[5]{34} = 2 + \frac{2}{5 \cdot 2^4} - \frac{2 \cdot 2^2}{25 \cdot 2^9} + \frac{6 \cdot 2^3}{125 \cdot 2^{14}} - \cdots$$

$= 2.0243984$　5乗すると 34.000076

埼玉県の飯島先陽さんに 村瀬健介さんが書かれた「パスカルの三角形の拡張」(2001年)を送っていただきました。私のレポートは、この論文の前の時代をテーマにしていることがわかりました。村瀬さんの論文を読んで パスカルの三角形の $n=-1$、$n=-1/2$ の行の持つ意味が何なのかを知ることができました。ありがとうございます。