武田　利一　様

2010．1．3

林　邦英

本年もよろしくお願いします。

近代ヨーロッパにおいて級数展開がどのようにして発明されたのかについて考えてみました。

和田　秀男さんより、1983年に書かれた「5．昔のπの計算」「6．建部賢弘のπの計算」をいただきました。一部分引用します。「読者も具体的な計算をどんどん実行しよう。」　村田　全さんについてふれてありましたので、「日本の数学西洋の数学（ちくま学芸文庫）」を読み直しています。新井　紀子さんのホームページを少し見せていただきました。ヘッケルさんについてふれていましたので、「生命の不可思議（岩波文庫）」を読み直しています。ベーコンさんの「新オルガノン」

を読むきっかけになった本です。定時制高校の生物のO先生にヘッケルさんのことを教えていただきました。P. 379より、
「個体発生は、遺伝と適応との生理学的官能によって決定せられる系統発生の短縮した約説に外ならぬ。」「一般形態学（1866年）」

以前、ボイヤーさんの数学史を読んでいたら、テイラーさんより前に平方根の級数展開が知られていたことが書いてあったので、平方根の表の分析（十進法で書かれた）から始まったのではと思いました。アラビアの方法への変形と立法根への応用をたしかめてみました。

まとまらない内容です。もうしわけありません。

平方根の級数展開

① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\frac{(a+b)^2 - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}$$

② bを求めるためには $b^2/2a$ を引けばよいが、bがわからないので $b \fallingdotseq b + b^2/2a$ として計算し、誤差をうち消す次の式を作る。

㋐ $b^2/2a$ の b に $b + b^2/2a$ を代入すると

$$\left(b^2 + 2b \cdot b^2/2a + b^4/(2a)^2\right)/2a$$

$$= b^2/2a + 2b^3/(2a)^2 + b^4/(2a)^3$$

$$\begin{array}{rlll} & b & + b^2/2a & \\ - & & (b^2/2a & + 2b^3/(2a)^2 + b^4/(2a)^3 \\ \hline & b & + 0 & - 2b^3/(2a)^2 - b^4/(2a)^3 \end{array}$$

㋑ $2b^3/(2a)^2$ の b に $b + b^2/2a$ を代入すると

$$2\left(b^3 + 3b^2 \cdot b^2/2a + 3b \cdot b^4/(2a)^2 + b^6/(2a)^3\right)/(2a)^2$$

$$= 2b^3/(2a)^2 + 6b^4/(2a)^3 + 6b^5/(2a)^4 + 2b^6/(2a)^5$$

$-2b^3/(2a)^2 - b^4/(2a)^3$

$2b^3/(2a)^2 + 6b^4/(2a)^3 + 6b^5/(2a)^4 + 2b^6/(2a)^5$

$0 \quad + 5b^4/(2a)^3 + 6b^5/(2a)^4 + 2b^6/(2a)^5$

② $5b^4/(2a)^3$ の b に $b + b^2/2a$ を代入すると

$5(b^4 + 4b^3 \cdot b^2/2a + 6b^2 \cdot b^4/(2a)^2 + 4b \cdot b^6/(2a)^3 + b^8/(2a)^4$

$)/(2a)^3$

$= 5b^4/(2a)^3 + 20b^5/(2a)^4 + 30b^6/(2a)^5 + 20b^7/(2a)^6 + 5b^8/(2a)^7$

$5b^4/(2a)^3 + 6b^5/(2a)^4 + 2b^6/(2a)^5$

$-5b^4/(2a)^3 - 20b^5/(2a)^4 - 30b^6/(2a)^5 - 20b^7/(2a)^6 - 5b^8/(2a)^7$

$0 \quad - 14b^5/(2a)^4 - 28b^6/(2a)^5 - 20b^7/(2a)^6 - 5b^8/(2a)^7$

③ 整理すると

$b - b^2/(2a) + 2b^3/(2a)^2 - 5b^4/(2a)^3 + 14b^5/(2a)^4$

④ $\sqrt{A^2+B}$ の形への変形

$$\sqrt{A^2+B} = A + \frac{B}{2A} - \frac{B^2}{(2A)^3} + \frac{2B^3}{(2A)^5} - \frac{5B^4}{(2A)^7} + \frac{14B^5}{(2A)^9}$$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$\frac{(a+b)^2-a^2}{2a} = b + b^2/2a$$

A^2+B と考えると

$B = 2ab + b^2$

$B/2a = b + b^2/2a$

③の b に $B/2A$ を代入すると④の式になる。

〔説明〕

25より少し大きい数の平方根の数値の表の分析は、平方根を級数展開の形で表わすはじまりだと思います。④の式を求めることができます。（B 平方根について オ1レポート）$\sqrt{A^2+B}$ をボンベリ式連分数を使って求める方が簡単です。級数展開の方法が問題になるのは立方根の場合です。

立方根の級数展開

① $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\frac{(a+b)^3 - a^3}{3a^2} = b + b^2/a + b^3/3a^2$$

② bを求めるためには $b^2/a + b^3/3a^2$ を引けばよいが bがわからないので $b \fallingdotseq b + b^2/a + b^3/3a^2$ として計算し誤差をうち消す次の式を作る。

㋐ $b + b^2/a + b^3/3a^2$ の b に $b + b^2/a + b^3/3a^2$ を代入

$(b + b^2/a + b^3/3a^2)^2/a$

$= b^2/a + 2b^3/a^2 + 5b^4/3a^3 + 2b^5/3a^4 + b^6/9a^5$

$$\begin{array}{rrrrrr} b & + b^2/a & + b^3/3a^2 & & & \\ & - b^2/a & - 2b^3/a^2 & - 5b^4/3a^3 & - 2b^5/3a^4 & - b^6/9a^5 \\ \hline b & + 0 & - 5b^3/3a^2 & - 5b^4/3a^3 & - 2b^5/3a^4 & - b^6/9a^5 \end{array}$$

㋑ $5b^3/3a^2$ の b に $b + b^2/a + b^3/3a^2$ を代入すると

$5b^3/3a^2 + 15b^4/3a^3 + 60b^5/9a^4 + \cdots$

$$-5b^3/3a^2 - 5b^4/3a^3 - 2b^5/3a^4 - b^6/9a^5$$
$$5b^3/3a^2 + 15b^4/3a^3 + 60b^5/9a^4 +$$
$$0 \quad + 10b^4/3a^3 + 54b^5/9a^4 +$$

③ 整理すると

$$b - b^2/a + 5b^3/3a^2 - 10b^4/3a^3 +$$

④ $\sqrt[3]{A^3+B}$ の形への変形

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\frac{(a+b)^3 - a^3}{3a^2} = b + b^2/a + b^3/3a^2$$

A^3+B と考えると

$$B = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\frac{B}{3a^2} = b + b^2/a + b^3/3a^2$$

③ の b に $B/3A^2$ を代入すると

$$\sqrt[3]{A^3+B} = A + \frac{B}{3A^2} - \frac{B^2}{9A^5} + \frac{5B^3}{81A^8} - \frac{10B^4}{243A^{11}} +$$

$\sqrt[3]{9}$ を求める

$9 = 2^3 + 1 \qquad A = 2\ ,\ B = 1$

$$\sqrt[3]{9} = 2 + \frac{1}{3 \times 2^2} - \frac{1}{9 \times 2^5} + \frac{5}{81 \times 2^8} - \frac{10}{243 \times 2^{11}} +$$

$$= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \frac{5}{20736} - \frac{10}{497664} +$$

$$= 2.0800822$$

3乗すると　8.9999788

÷9 = ÷ = −1 = ÷3 = +1 = 1.0000008

× 2.0800822 = 2.0800838

3乗すると　8.9999996