武田　利一　様

2009.12.11

πの近似式について、何度も書き直し、もうしわけありません。

今日は、名大と南山大の博物館に行ってきました。市民に開かれた場のあることは、とてもうれしいことです。

南山大学人文学部の学生の方による林　子平の描いた地図の展示場でいただいた資料のコピーを同封します。

林子平の地図と比べてみよう！！！

当時はどんな時代？？　①

当時は、海禁政策を行っていた時代になります。海禁政策によって、日本以外の国の情報はほとんどシャットアウトされていました。そのため当時の国民は、海外の国がどのようなことをしているのか、少しも知りませんでした。

当時の世界の国々様相は、発達した科学力で、船や大砲を造りだし、それらを用いて、東南アジアへの進出を始めていた時代になります。その中でも、ロシアが千島列島や蝦夷地に進出し、支配下におこうとしていました。

当時はどんな時代？？　②

現在、私たちは地図を交通のためや地理を知るためなどを目的として使用しています。しかし昔の地図の利用目的は今とは大きく異なっています。例えば、林子平が地図ご描く前までの江戸時代では、地図は諸大名の領地や石高を示すために、あるいは全国の概況や政治的権力を示すために用いられていました。つまり、地図はあくまでも幕府や大名の目的に沿わせて地図が作られていたのです。

はじめに

皆さんは普段地図を見ますか？地図の歴史を知っていますか？伊能忠敬の地図は有名だと思いますが、それ以前の地図って見たことありますか？今回は林子平という伊能忠敬以前の人が描いた地図を紹介しようと思います。是非その眼で林子平の描いた奇怪な地図に心を躍らせてください。

林子平について

1738～1793の江戸時代後期の人！『海国兵談』『三国通覧図説』が代表作に挙げられる。限られた知識で日本について理解を深めようとし、外国勢力から日本を守るための国防論の先駆的存在だった。当時、海禁政策を行っていた時代で、海外の情報が乏しい中、外国勢力から日本を守るための国防論を唱えた人物が林子平です。

資料について

本展示で用いている史料は、南山大学人類学博物館において保管されている日本の古地図の中の林子平が描いたものになります。

日本全図・琉球(沖縄)・蝦夷(蝦夷)の3つをメインに扱っている地図を本展示にて用いてます。

会場

見たことない地図がここにある！

見て楽しい地図がここで見れる！

昔の地図で新たな発見！？

林子平の描いた地図

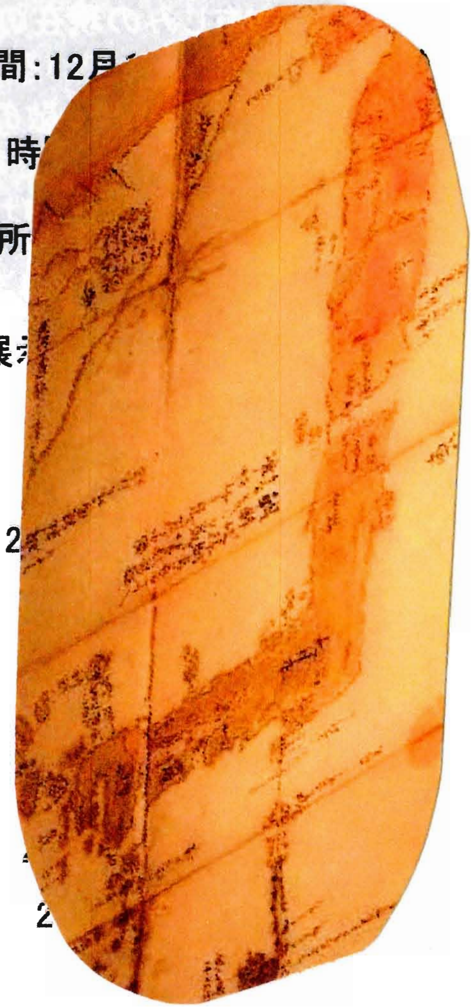
～江戸時代の不思議な地図～

期間：12月

時

場所

展



sin cos tan の 30° 15° 7.5° 3.75°
の表づくり と観察 （8桁電卓を使って）

円周率 π の近似式について
（アルキメデスさんの方法の続きの物語）

数表のつくり方

sin 30° = 0.5 を使って

0.5 × = M+ 1 − MRC MRC = √

cos 30° = 0.8660254

÷ = × 0.5 =

tan 30° = 0.5773502

1 − 0.8660254 = × M+

0.5 × M+ MRC MRC √ ÷ 2 =

sin 15° = 0.258819

× M+ 1 − MRC MRC = √

cos 15° = 0.9659258

÷ = × 0.258819 =

tan 15° = 0.2679491

8桁電卓を使って作った数表

sin 30° = 0.5
cos 30° = 0.8660254
tan 30° = 0.5773502

sin 15° = 0.258819
cos 15° = 0.9659258
tan 15° = 0.2679491

sin 7.5° = 0.130526
cos 7.5° = 0.9914449
tan 7.5° = 0.1316522

sin 3.75° = 0.0654027
cos 3.75° = 0.9978589
tan 3.75° = 0.065543

sinとtanの比重を変えて平均を求め 2で割ると

[30°]

(S1 + t1) ÷ 2 ÷ 2 = 0.2693375
(S2 + t1) ÷ 3 ÷ 2 = 0.2628917
(S3 + t1) ÷ 4 ÷ 2 = 0.2596687

[15°]

(S1 + t1) ÷ 2 ÷ 2 = 0.131692
(S2 + t1) ÷ 3 ÷ 2 = 0.1309311
(S3 + t1) ÷ 4 ÷ 2 = 0.1305507

[7.5°]

(S1 + t1) ÷ 2 ÷ 2 = 0.0655445
(S2 + t1) ÷ 3 ÷ 2 = 0.0654507
(S3 + t1) ÷ 4 ÷ 2 = 0.0654037

2つの数表の観察でわかったこと

(S1 + t1) ÷ 2 ÷ 2 は

半角のtanを近似します。

(S3 + t1) ÷ 4 ÷ 2 は

半角のsinを近似します。

(S2 + t1) ÷ 3 の場合は？

関数電卓で確かめました。

$(\sin 1^\circ \times 2 + \tan 1^\circ) \div 3 \div 4$

$= 4.36332315 \times 10^{-3}$ −A

$\tan 0.25^\circ = 4.363350821 \times 10^{-3}$ −B

$\sin 0.25^\circ = 4.363309285 \times 10^{-3}$ −C

720倍します。

A 3.14159268

B 3.14161259

C 3.14158268

π 3.14159265

円周率 π の近似式について

（アルキメデスさんの方法の続きの物語）

〔はじめに〕

アルキメデスさんは円に内接・外接する正96角形の周囲の長さを計算して $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ を求めました。曲線を直線で近似する「はさみうち法」です。3.140845 < π < 3.1428571 より、π ≒ 3.14 であることがわかります。

$(3\frac{10}{71} \times 2 + 3\frac{1}{7}) \div 3$ を計算すると、3.1415157 となり 3.14159265 に近づきます。

内接と外接の比重を変えて平均するという考え方は円周率を効率よく求める計算方法を求めてきた歴史の中でどのように位置づけられるのか考えています。

「はさみうち法」で π の精度が高まってくると、外接・内接の数値を有効利用したいという気持ちがわいてくることはごく自然なことだと考えることができます。

8桁電卓を使って求めた 3.75°の場合の数値を使うと、

$(0.0654027 \times 2 + 0.065543) \div 3 \times 48$

$= 3.1415712$

計算量を考えますと、素朴な方法ですが精度の良い数値だと思います。

〔内接と外接の比重を変えて平均すると〕

π の近似式の始まりは

$$\frac{2\cdot\sin\theta+\tan\theta}{3}\times\frac{360^\circ}{2\theta}\fallingdotseq\pi \qquad —①$$

だと思います。

この式は tan と sin の半角を求める近似式と深い関係にありました。

$$\frac{\sin\theta+\tan\theta}{2}\div 2\fallingdotseq\tan\theta/2$$

$$\frac{3\sin\theta+\tan\theta}{4}\div 2\fallingdotseq\sin\theta/2$$

内接 ＜ 円周 ＜ 外接 の考え方を使って

アルキメデスさんは円周を求めπを求めました。

式の場合にもこの考え方をあてはめることで、

①のπの近似式を説明できます。「πの近似式は sin と tan の半角の近似式ではさまれている。」

私は中学生の時に比重が 1:1 の平均をためしてみました。tan の半角の近似には気がつきませんでした。

2:1 は 10年前にためしてみました。結果におどろき図書館で本を調べました。一松 信さんの書かれた「教室に電卓を」(海鳴社)の本に出あいました。

3:1 の場合は 2009年 11月にたしかめました。

3つの数値がそろって、始めて比重が 1:1 の場合が何なのかを知ることができました。

アルキメデスさんの方法を知ってから 40年もかかってしまいました。

〔2つ目のπの近似式について〕

インターネットを使い少し調べました。広島市の方のホームページ「数理塾」の中に「円周率πの数値計算」があります。その中の「2 近似式の改良」に関心をもちました。

ニコラス・クザヌス (1401 − 1464) さん

屈折の法則のスネル (1580 − 1626) さん

ホイヘンス (1629 − 1695) さん

$$\frac{2\cdot\sin\theta+\tan\theta}{3}>\theta>\frac{3\cdot\sin\theta}{2+\cos\theta}$$

$$\frac{3\cdot\sin\theta}{2+\cos\theta}\times\frac{360^\circ}{2\theta}\fallingdotseq\pi$$

の式が次にきました。この式は

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

の変形だと思います。

tanθ ＞ 円弧θ なので

cosθ の部分を大きくする必要があります。

$\tan 45^\circ=1$　$\sin 90^\circ=1$　$\cos 90^\circ=0$ を使って

$$\frac{1}{0}\div 2=1$$

$$\frac{(\quad)\ 1}{1+\ \ 0}\div 2=1$$

(　) として (1+) と (2×)

を考えることができます。(2×) を使います。

$$\frac{2\times 1}{1+0}\div 2=1$$

$$\frac{2\cdot\sin\theta}{1+\cos\theta}\div 2\fallingdotseq\tan\theta/2$$

高知工業高等専門学校の高木 和久さんに

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$$

であることを教えていただきました。(2009.12.8付 手紙)

$$\frac{3\cdot\sin\theta}{2+\cos\theta}\div 2\fallingdotseq$$

$$\frac{4\cdot\sin\theta}{3+\cos\theta}\div 2\fallingdotseq\sin\theta/2$$

sinとtanの半角の近似式が見つかりましたので

$$\frac{3\cdot\sin\theta}{2+\cos\theta}\times\frac{360^\circ}{2\theta}\fallingdotseq\pi \qquad -②$$

とします。

①と②の近似式の誤差を調べました。

$$\frac{2\cdot\sin\theta+\tan\theta}{3}\times\frac{360^\circ}{2\theta}>\pi>\frac{3\cdot\sin\theta}{2+\cos\theta}\times\frac{360^\circ}{2\theta}$$

誤差の大きさは約9:1なので2つの式を加重平均し、

$$\left(9\times\frac{3\cdot\sin\theta}{2+\cos\theta}+\frac{2\cdot\sin\theta+\tan\theta}{3}\right)\div 10\times\frac{360^\circ}{2\theta}\fallingdotseq\pi$$

としました。

〔おわりに〕

祖沖之さん（5世紀宋）は、

$$\pi\fallingdotseq\frac{355}{113}\quad(3.1415929)$$

を求めました。どのようにして求めたのか、興味がわきます。

江戸時代の鎌田俊清さん（〜1747 70才）が内接、外接の周を計算したことが、「学術を中心とした和算史上の人々」（平山諦著 ちくま学芸文庫）に書かれています。

3：1の比重にたどりつくまでに40年もかかってしまいました。めんどくさいと思わずたしかめてみることの大切さをあらためて感じました。

5年以上も前のことですが、

十進法においての1÷49の循環節42桁の分割和において、

2分割 3分割 6分割 は9が並びました。

7分割の場合もはじめは9が並ぶだろうとかってに思っていましたが、めんどくさいと思わずにたしかめたら 1÷7の循環節が現われました。

東海大学の当時大学院生だった方へ手紙を書いていた時のことです。