武田　利一　様

2009．12．8

林　邦英

円周率を求める近似式のレポートを作り直しました。妻に新しいプリンターを買ってもらいました。

CASIOさんの「keisan」の中に、

a　外接多角形の外周

b　内接多角形の外周

とした漸化式アルゴリズム

があることを知りました。勉強中です。

$\sin 15^\circ / (1+\cos 15^\circ) - \tan 7.5^\circ =$

π の近似式の始まりは

$$\frac{2\cdot\sin\theta + \tan\theta}{3} \times \frac{360^\circ}{2\theta} \fallingdotseq \pi$$

だと思います。

この式は tan と sin の半角を求める近似式と関係が深いと思います。

$$\frac{\sin\theta + \tan\theta}{2} \div 2 \fallingdotseq \tan \theta/2$$

$$\frac{3\cdot\sin\theta + \tan\theta}{4} \div 2 \fallingdotseq \sin \theta/2$$

内接 < 円周 < 外接 の考え方を使って

アルキメデスさんは円周を求め、πを求めました。

式の場合にもこれをあてはめると、上の式になります。

私は中学生の時に比重が 1：1 の平均をためしてみました。

tan の半角の近似には気がつきませんでした。2：1は

10年前にためしてみました。結果におどろき、図書館

で本を調べました。一松 信さんの書かれた

「教室に電卓を」（海鳴社）の本に出あいました。

今年の11月に 3：1 の場合をたしかめました。3つの

結果がそろって、始めて比重が 1：1 の場合が

何なのかを知ることができました。アルキメデスさんの

方法を知ってから40年もかかってしまいました。

インターネットを使って少し調べました。広島市の才のホーム

ページ 数理塾 の中に「円周率πの数値計算」があり

ます。その中の「2 近似式の改良」に関心をもち

ました。

ニコラス・クザヌス （1401－1464）さん

屈折の法則の スネル （1580－1626）さん

ホイヘンス （1629－1695）さん

$$\frac{2\cdot\sin\theta + \tan\theta}{3} > \theta > \frac{3\cdot\sin\theta}{2+\cos\theta}$$

$3\cdot\sin\theta \;/ (2+\cos\theta) \times 360/2\theta \fallingdotseq \pi$

の式が次にきたようです。この式も tan と sin の半角を求める近似式と深い関係にあります。

$2\cdot\sin\theta \;/ (1+\cos\theta) \div 2 \fallingdotseq \tan \theta/2$

$4\cdot\sin\theta \;/ (3+\cos\theta) \div 2 \fallingdotseq \sin \theta/2$

近似式の誤差を調べました。

$\sin\theta \;/ (1+\cos\theta) - \tan \theta/2$

θ		θ	
15°	0	1°	-5×10^{-15}
30°	1×10^{-13}	5°	-1.3×10^{-13}
45°	-1.2×10^{-12}	10°	-5×10^{-14}
60°	-1.7×10^{-12}		
75°	-2×10^{-12}		

結果におどろいています。

ポケットコンピュータでたしかめました。

2つの近似式の加重平均を考えました。

$$\left(9\times\frac{3\cdot\sin\theta}{2+\cos\theta} + \frac{2\cdot\sin\theta+\tan\theta}{3}\right)\div 10 \times \frac{360}{2\theta} \fallingdotseq \pi$$

$\theta=10$ $\pi \fallingdotseq 3.141592761$

$\theta=5$ $\pi \fallingdotseq 3.141592655$

$\theta=1$ $\pi \fallingdotseq 3.141592654$

関数電卓の数値です。