武田 利一 様

2009.5.27

林 邦英

書きかけのレポートですが、送らせていただきます。

テーマはN乗根の近似式の求め方です。全体の構成は、

Ⓐ はじめに

3乗根を例として

① $\dfrac{x+2}{3}$

② $\dfrac{(3+1)\cdot x+(3-1)}{(3-1)\cdot x+(3+1)}=\dfrac{2x+1}{x+2}$

③ $\left(\dfrac{2x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{3x}{2x+1}\right)\div 3$

の紹介

Ⓑ 平方根の場合

Ⓒ N乗根の場合

Ⓓ 一点近似と区間近似

高知高専の高木 和久さんに教えていただきました。ありがとうございます。

N乗根の求め方 （xは1の近く）

① 平均の考え方　　　5乗根の例

$$\frac{x+(N-1)}{N} \qquad \frac{x+4}{5}$$

② ハレイの方法　　　5乗根の例

$$\frac{(N+1)\cdot x+(N-1)}{(N-1)\cdot x+(N+1)} \qquad \frac{6x+4}{4x+6}=\frac{3x+2}{2x+3}$$

③　　　　　　　　　5乗根の例

$$\left(\frac{4x+1}{3x+2}+\frac{3x+2}{2x+3}+\frac{2x+3}{x+4}+\frac{x+4}{5}+\frac{5x}{4x+1}\right)$$

$$\div 5$$

$\sqrt[5]{2}$ の場合は

$$\left(\frac{9}{8}+\frac{8}{7}+\frac{7}{6}+\frac{6}{5}+\frac{10}{9}\right)\div 5=1.1491269$$

$$1.1491269^5=2.0037332$$

③の方法には、①、②の方法が含まれています。

平方根の分数関数近似式について

ヘロン式反復法を使って$\sqrt{2}$の近似分数を求めます。

$$2 = 2\times 1$$

$$\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \qquad 2\times\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12} \qquad 2\times\frac{12}{17} = \frac{24}{17}$$

$$\frac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2} = \frac{577}{408} \qquad 2\times\frac{408}{577} = \frac{816}{577}$$

$$\frac{\frac{577}{408}+\frac{816}{577}}{2} = \frac{665857}{470832}$$

$$\frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{17}{12} = 1.4166666$$

$$\frac{577}{408} = 1.4142156$$

2をxとします。

$$x = x\times 1$$

$$\frac{x+1}{2} \qquad \frac{2x}{x+1}$$

$$\frac{\frac{x+1}{2}+\frac{2x}{x+1}}{2} = \frac{x^2+6x+1}{4x+4} \qquad \frac{4x^2+4x}{x^2+6x+1}$$

$$\frac{\frac{x^2+6x+1}{4x+4}+\frac{4x^2+4x}{x^2+6x+1}}{2}$$

$$= \frac{x^4+28x^3+70x^2+28x+1}{8x^3+56x^2+56x+8} \quad — Ⓐ$$

Ⓐの式に $x=1.5$ を代入します。

$$\frac{300.0625}{245} = 1.224744898$$

Ⓐの式に $x=1.25$ を代入します。

$$\frac{202.50390625}{181.125} = 1.118033988958$$

ボンベリ式連分数を使って$\sqrt{2}$の近似分数を求めます。

$$2 = 1^2+1$$

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+}}} = 1+\frac{1}{2+}$$

$$\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{1}{0} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{17}{12} \quad \frac{41}{29} \quad \frac{99}{70}$$

$$\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{239}{169} \quad \frac{577}{408}$$

$$7 = 1\times 1+3\times 2$$

$$17 = 3\times 1+7\times 2$$

$$5 = 1\times 1+2\times 2$$

$$12 = 2\times 1+5\times 2$$

0	$\frac{1}{0}$	
1	$\frac{1}{1}$	
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{x+1}{2}$
3	$\frac{7}{5}$	
4	$\frac{17}{12}$	$\frac{x^2+6x+1}{4x+4}$
5	$\frac{41}{29}$	
6	$\frac{99}{70}$	
7	$\frac{239}{169}$	
8	$\frac{577}{408}$	$\frac{x^4+28x^3+70x^2+28x+1}{8x^3+56x^2+56x+8}$

5

3 $\frac{7}{5}$ に対応する式を求めます。

分数式の次数を予想します。

2	3	4	5	6	7	8
$\frac{1}{0}$		$\frac{2}{1}$				$\frac{4}{3}$
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$

$\frac{一次}{一次}$ で $x=2$ のとき $\frac{7}{5}$ となる場合は、

$$7 = x+5 \qquad 5 = x+3$$
$$= 2x+3 \qquad = 2x+1$$
$$= 3x+1$$

$x=1$ のとき 1 となる場合は、

$$\frac{3x+1}{x+3}$$

6

$$\frac{\frac{3x+1}{x+3}+\frac{x^2+3x}{3x+1}}{2} = \frac{x^3+15x^2+15x+1}{6x^2+20x+6}$$

1	$\frac{1}{1}$	
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{x+1}{2}$
3	$\frac{7}{5}$	$\frac{3x+1}{x+3}$
4	$\frac{17}{12}$	$\frac{x^2+6x+1}{4x+4}$
5	$\frac{41}{29}$	
6	$\frac{99}{70}$	$\frac{x^3+15x^2+15x+1}{6x^2+20x+6}$
7	$\frac{239}{169}$	
8	$\frac{577}{408}$	$\frac{x^4+28x^3+70x^2+28x+1}{8x^3+56x^2+56x+8}$

7

分子，分母の規則性を調べます。

2	3	4
$\frac{x+1}{2}$	$\frac{3x+1}{x+3}$	$\frac{x^2+6x+1}{4x+4}$

分母は 1つ前の分子と分母を加えたもの

$$x+1+2 = x+3$$
$$3x+1+x+3 = 4x+4$$

分子は 1つ前の分子に x 倍した分母を加えたもの

$$x+1+2x = 3x+1$$
$$3x+1+x^2+3x = x^2+6x+1$$

8

文字を使って表わします。

分子を X_n 分母を Y_n とします。

P_n (X_n, Y_n) について

$$X_1 = 1, \quad Y_1 = 1$$

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + xY_n \\ Y_{n+1} = X_n + Y_n \end{cases}$$

$P_1 = (1, 1)$ $\quad \frac{1}{1}$

$P_2 = (1+x, 2)$ $\quad \frac{x+1}{2}$

$P_3 = (1+3x, 3+x)$ $\quad \frac{3x+1}{x+3}$

$P_4 = (1+6x+x^2, 4+4x)$ $\quad \frac{x^2+6x+1}{4x+4}$

$P_5 = (1+10x+5x^2, 5+10x+x^2)$

$$\frac{5x^2+10x+1}{x^2+10x+5}$$

3乗根の場合について

平均の考え方を使った式

$$x = x \times 1 \times 1$$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{x+1+1}{1+1+1}$$

平方根の場合と同じ方法を使います。

$$P_n = (X_n, Y_n, Z_n)$$

$$X_1 = 1, \quad Y_1 = 1 \quad Z_1 = 1$$

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + xY_n + xZ_n \\ Y_{n+1} = X_n + Y_n + xZ_n \\ Z_{n+1} = X_n + Y_n + Z_n \end{cases}$$

$$P_1 = (1, 1, 1)$$

$$P_2 = (1+2x, 2+x, 3)$$

$$P_3 = (1+7x+x^2, 3+6x, 6+3x)$$

P_2 の数値を使います。

x に 2 を代入します。

$$2x+1 = 5$$

$$x+2 = 4$$

$$3 = 3$$

$\sqrt[3]{2} \fallingdotseq 1.26$ に近い分数は、

$$\frac{5}{4}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{6}{5}$$

$$\frac{2x+1}{x+2} \quad \frac{x+2}{3} \quad \frac{3x}{2x+1}$$

$$\frac{X}{Y} \quad \frac{Y}{Z} \quad \frac{xZ}{Y}$$

3つの数値の平均を求めます。

$$\frac{\frac{5}{4}+\frac{4}{3}+\frac{6}{5}}{3} = \frac{227}{180}$$

5乗根の場合について

$$P_n \ (A_n, B_n, C_n, D_n, E_n)$$

$$A_1 = 1, B_1 = 1, C_1 = 1, D_1 = 1, E_1 = 1$$

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n + xB_n + xC_n + xD_n + xE_n \\ B_{n+1} = A_n + B_n + xC_n + xD_n + xE_n \\ C_{n+1} = A_n + B_n + C_n + xD_n + xE_n \\ D_{n+1} = A_n + B_n + C_n + D_n + xE_n \\ E_{n+1} = A_n + B_n + C_n + D_n + E_n \end{cases}$$

$$P_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$P_2 = (4x+1, 3x+2, 2x+3, x+4, 5)$$

P_2 の数値を使って

$\frac{A}{B}$	$\frac{4x+1}{3x+2}$	$x=2$	$\frac{9}{8}$
$\frac{B}{C}$	$\frac{3x+2}{2x+3}$		$\frac{8}{7}$
$\frac{C}{D}$	$\frac{2x+3}{x+4}$		$\frac{7}{6}$
$\frac{D}{E}$	$\frac{x+4}{5}$		$\frac{6}{5}$
$\frac{xE}{A}$	$\frac{5x}{4x+1}$		$\frac{10}{9}$

5つの平均は

1.149126984

5乗すると

2.003734219