平方根の区間近似式（1次）について

$\sqrt{x}$ の区間(1→2) を 1次式で近似する式のもっとも簡単な式の作り方は、2つの点を通る直線の式です。

$\sqrt{1+a}$　$0<a<1$ の場合は

$(\sqrt{2}-1)a+1$

$0.4142\,a+1$

$\sqrt{x}$　$1<x<2$ の場合は

$(\sqrt{2}-1)x + 1-(\sqrt{2}-1)$

$= (\sqrt{2}-1)x + (2-\sqrt{2})$

$0.4142x + 0.5858$

誤差の表 (x)

1	0	1.5	-0.0176
1.1	-0.0074	1.6	-0.0164
1.2	-0.0126	1.7	-0.0139
1.3	-0.0159	1.8	-0.0103
1.4	-0.0173	1.9	-0.0056

誤差（絶対誤差）の最大値を半分にします。
誤差が一番大きくなる場所を求めます。

$(\sqrt{2}-1)x + (2-\sqrt{2}) - \sqrt{x}$

誤差を求める式を微分します。

$(\sqrt{2}-1) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

誤差が一番大きくなる場所は

$(\sqrt{2}-1) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$

$\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{x}$

$\sqrt{x} = \dfrac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$

$x = \left(\dfrac{1}{2(\sqrt{2}-1)}\right)^2$

$x = 1.457106781$

$0.414214x + 0.585787$
に 1.457106781 を代入して
1.189339571
$\sqrt{1.457106781}$ は
1.207106781
差を求め 2で割ると
$0.01776721 \div 2$
0.008883605
$0.585787 + 0.008884$
$= 0.594671$
$0.414214x + 0.594671$

誤差の表

1	0.0089	1.5	-0.0086	2	0.0089
1.1	0.0015	1.6	-0.0075	1.4571	-0.0089
1.2	-0.0037	1.7	-0.0050		
1.3	-0.0070	1.8	-0.0014		
1.4	-0.0086	1.9	0.0032		

相対誤差の最大値を最小にした最良の1次の区間近似式について
「数値計算のわざ 二宮市三 編著（共立出版）」
（3ページ） 1.3 最良近似式の作成
（7ページ） 1.5 平方根の最良近似式
平成14年2月から4月にいただいた手紙7通を参考にしました。ありがとうございます。

$p(x+q)$ に
$p = 0.417308$
$q = 1.414212$
を代入します。

$0.417308(x + 1.414212)$
$= 0.417308x + 0.590162$

誤差の表

	絶対誤差	相対誤差
1	0.0075	1.0075
1.1	0.0004	1.0004
1.2	−0.0045	0.9959
1.3	−0.0075	0.9934
1.4	−0.0088	0.9925
1.5	−0.0086	0.9930
1.6	−0.0071	0.9944
1.7	−0.0043	0.9967
1.8	−0.0003	0.9998
1.9	0.0046	1.0034
2	0.0106	1.0075
$\sqrt{2}$		$0.99253 \fallingdotseq 1/1.0075$

式の作り方

近似一次式： $r(x) = a(x+b)$

相対誤差： $e(x) = (r(x) - \sqrt{x})/\sqrt{x}$

$$= a(\sqrt{x} + b/\sqrt{x}) - 1$$

1. 区間 (1, 2) の両端で誤差が同じ最大値となる。 $e(1) = e(2)$
2. 区間内の値 $x = x_0$ で誤差が最小となる。 $e'(x_0) = 0$
3. 最大誤差と最小誤差は絶対値が等しく符号が反対である。 $e(1) + e(x_0) = 0$

1. を解いて $b = \sqrt{2}$ が得られます。
2. を解いて $x_0 = \sqrt{2}$ が得られます。
3. 以上を 3. に代入して $a = 2/(\sqrt[4]{2}+1)^2$。
4. $e(1) = a(1+b) - 1$ に代入して最大誤差 $e(1) = ((\sqrt[4]{2}-1)/(\sqrt[4]{2}+1))^2$ が得られます。