

平方根について(ペル方程式と回文構造)

北海道の加藤秀隆さんに送っていた
「ペル方程式の解についての資料」
林田県の高倉 亘 さんの
「 \sqrt{n} の連分数展開に関する考察」
を参考にしました。
ありがとうございます。

$\sqrt{7}$ と $\sqrt{13}$ の分析ではよくわからなかった
性質が $\sqrt{61}$, $\sqrt{19}$ を分析すると見えて
きました。なぜかなと思います。

復刻版 カシヨリ初等数学史 216ページ

「おま観察よ、鋭敏な観察よ!」

ナノカ-ボンの科学 (篠原久典著) 220ページ

「たかむと大切なのは、偶然の発見を見逃さない。
研究を淹められた観察力と感性である。」

ペル方程式の解を求める。

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

$$D=61$$

$$x = 1766319049$$

$$y = 226153980$$

の場合についての解き方の例

$$\sqrt{61} \text{ について}$$

アラビヤの方法を使って

$$61 = 64 - 3$$

$$\sqrt{61} = \sqrt{8^2 - 3} \approx 8 - \frac{3}{16}$$

ポンベリ式連分数にすると

$$\sqrt{61} = 8 - \frac{3}{16 -}$$

$$\textcircled{8} \quad \textcircled{-3/16} \quad \textcircled{-3/16} \quad \textcircled{-3/16}$$

$$\frac{8}{1} \quad \frac{125}{16} \quad \frac{1976}{253} \quad \frac{31241}{4000}$$

$$\textcircled{-3/16}$$

$$\frac{493928}{63241}$$

$$\textcircled{-3/16}$$

$$\frac{7809125}{999856}$$

ユークリッド互除法を使って

$$\frac{7809125}{999856} = 7 + (1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14, 1, 14, 1, 1, 1, 5)$$

$\times 2$ の規則性を使って

$$\sqrt{61} = 7 + (1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14) 2n$$

$$\textcircled{2} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{7}{1} \quad \frac{8}{1} \quad \frac{39}{5} \quad \frac{125}{16} \quad \frac{164}{21} \quad \frac{453}{58} \quad \frac{1070}{137} \quad \frac{1523}{195}$$

$$(+12) \quad (-3) \quad (+4) \quad (-9) \quad (+5) \quad (-5) \quad (+9) \quad (-4)$$

$$\textcircled{3} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{14}$$

$$\frac{5639}{722} \quad \frac{24079}{3083} \quad \frac{29718}{3805} \quad \frac{440131}{56353}$$

$$(+3) \quad (-12) \quad (+1)$$

$\sqrt{7}$ と $\sqrt{13}$ の分析により得た方法を使って

$$29718^2 + 1 = 61 \times 3805^2 \text{ を使って}$$

$$29718 \times 2 = 59436$$

$$29718 \times 59436 + 1 = 1766319049$$

$$3805 \times 59436 = 226153980$$

$$1766319049^2 - 1 = 61 \times 226153980^2$$

$\sqrt{13}$ について

$$k = 36 \text{ の場合 } (A = 1)$$

$$18 \times 36 + 1 = 649$$

$$5 \times 36 = 180$$

$$k = 1296 \text{ の場合 } (A = -1)$$

$$649 \times 1296 - 1 = 842401$$

$$180 \times 1296 = 233640$$

$\sqrt{7}$ の近似分数 $k=16$

A	+3	-2	+3	-1
	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{-1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{1}{0}$
	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$
	$\frac{37}{14}$	$\frac{45}{17}$	$\frac{82}{31}$	$\frac{127}{48}$
		$\frac{717}{271}$		$\frac{2029}{765}$
	$\frac{11427}{4319}$		$\frac{32257}{12192}$	

$k=16$ の 16 は

$8/3$ の $8 \times 2 = 16$

$8^2 + A = 7 \times 3^2$ $A = -1$ 故に

$127 \times 16 - 8 = 2029$

$2029 \times 16 - 127 = 32257$

$\sqrt{7} = 2 + (1, 1, 1, 4)_n$

$\sqrt{13}$ の近似分数 $k=36$

	$11/-3$	$-7/-2$	$4/-1$	$3/1$	$1/0$
	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{18}{5}$
	(+4)	(-3)	(3)	(-4)	(+1)
	$\frac{119}{33}$	$\frac{137}{38}$	$\frac{256}{71}$	$\frac{393}{109}$	$\frac{649}{180}$
	(-4)	(+3)	(-3)	(+4)	(-1)
	$\frac{4287}{1189}$		$k=36$ の 36 は	$\frac{23382}{6485}$	
	(+4)	$18/5$ の $18 \times 2 = 36$		(+1)	
	$\frac{154451}{42837}$	$18^2 + A = 13 \times 5^2$		$\frac{842901}{233640}$	
	(-4)	$A = 1$		(-1)	
	$\frac{5564523}{1543321}$				
	(+4)				
	$\sqrt{13} = 3 + (1, 1, 1, 1, 6)_n$				

回文構造について

$\sqrt{61}$ について

7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 19
 (+12)(-3)(+4)(-9)(+5)(-5)(+9)(-4)(+3)(-12) Aの値

$\sqrt{13}$ の場合

3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6
 (+4)(-3)(+3)(-4)(+1)(-4)(+3)(-3)(+4)(-1)

$\sqrt{19}$ の場合

$\sqrt{19} = 4 + (2, 1, 3, 1, 2, 8)_n$
 4, 2, 1, 3, 1, 2, 8
 (+3)(-5)(+2)(-5)(+3) Aの値

$\sqrt{7}$ の場合

2, 1, 1, 1, 4
 (+3)(-2)(+3)(-1)

回文構造を利用した補正の例

$\sqrt{97} = \frac{3910}{397}$ を使って

$\frac{3910}{397} = 9 + (1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4)$

⑨ ① ⑤ ① ① ① ① ① ①

$\frac{9}{1} \frac{10}{1} \frac{59}{6} \frac{69}{7} \frac{128}{13} \frac{197}{20} \frac{325}{33} \frac{522}{53} \frac{847}{86}$

(+16)(-3)(+11)(-8)(+9)(-9)(+8)(-11)(+3)

9, $\overbrace{1, 5, 1, 1, 1}^5$, $\overbrace{1, 1, 1, 5, 1}^5$

(+16)(-3)(+11)(-8)(+9)(-9)(+8)(-11)(+3) $\overline{-16}$

+1
 [9x2=18]
 ↓

$\sqrt{97} = 9 + (1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 18)_n$