武田 利一 様

2007.7.26

林 邦英

ポスター展用にと思い作りました。テーマは平方根の近似分数の表作りです。$\sqrt{3/2}$ を例としてとりあげ、いくつかの方法の紹介と、AおよびKについて説明しました。

使えるかどうかの判断は、武田さんにおまかせします。

全国大会の成功をお祈りします。

$\sqrt{\frac{3}{2}}$ について ①

アラビアの方法 $\sqrt{A^2+a} \fallingdotseq A+\frac{a}{2A}$ を使います。

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1^2+\frac{1}{2}} \fallingdotseq 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

ボンベリ式連分数にすると

$1+\frac{1}{4+} = \sqrt{5}-1$ になります。

$$\left( \sqrt{5} = \sqrt{2^2+1} = 2+\frac{1}{4+} \right)$$

ニュートン法で続きを求めます。

$$\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = \frac{24}{16} + \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}} \fallingdotseq \frac{5}{4} - \frac{1\times4}{16\times2\times5} = \frac{5}{4}-\frac{1}{40} = \frac{49}{40}$$

$$\left(\frac{49}{40}\right)^2 = \frac{2401}{1600} = \frac{2400}{1600} + \frac{1}{1600}$$

$$\sqrt{\left(\frac{49}{40}\right)^2-\frac{1}{1600}} \fallingdotseq \frac{49}{40} - \frac{1\times40}{1600\times2\times49}$$

$$= \frac{4802}{3920} - \frac{1}{3920} = \frac{4801}{3920}$$

ヘロン式反復法

②

$$5^2-1=\frac{3}{2}\times 4^2$$

$$\frac{5}{4} \qquad \frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{6}{5}$$

$$\frac{\frac{5}{4}+\frac{6}{5}}{2}=\frac{25+24}{40}=\frac{49}{40}$$

$$\frac{40}{49}\times\frac{3}{2}=\frac{60}{49}$$

$$\frac{\frac{49}{40}+\frac{60}{49}}{2}=\frac{2401+2400}{3920}=\frac{4801}{3920}$$

ニュートン法とヘロン式反復法の数値は一致します。

ユークリッド互除法 

$\dfrac{4801}{3920}$ を使います。

$$4801 = 3920 \times 1 + 881$$
$$3920 = 881 \times 4 + 396$$
$$881 = 396 \times 2 + 89$$
$$396 = 89 \times 4 + 40$$
$$89 = 40 \times 2 + 9$$
$$40 = 9 \times 4 + 4$$
$$9 = 4 \times 2 + 1$$
$$4 = 1 \times 4$$

$$\frac{4801}{3920} = 1 + (4, 2, 4, 2, 4, 2, 4)$$

⇩

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1 + (4, 2)_n$$

$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1 + (4, 2)_n$ を使います。 ④

| ① | ④ | ② | ④ | ② | ④ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{11}{9}$ | $\frac{49}{40}$ | $\frac{109}{89}$ | $\frac{485}{396}$ |

| ② | ④ | ② | ④ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1079}{881}$ | $\frac{4801}{3920}$ | $\frac{10681}{8721}$ | $\frac{47525}{38804}$ |

漸化式による計算例

$49 \times 2 + 11 = 109$

$9 \times 4 + 4 = 40$

$\sqrt{7} = 2 + \frac{3}{4+}$ の場合

| ② | ③/④ | ③/④ | ③/④ | ③/④ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{1}$ | $\frac{11}{4}$ | $\left(\begin{array}{l} 11 \times 4 + 2 \times 3 = 50 \\ 4 \times 4 + 1 \times 3 = 19 \end{array}\right.$ | $\frac{50}{19}$ | $\frac{233}{88}$ |

$$\left(\begin{array}{l} 50 \times 4 + 11 \times 3 = 233 \\ 19 \times 4 + 4 \times 3 = 88 \end{array}\right.$$

# 表の作成（1） ⑤

$\frac{1}{1}$

$\frac{5}{4}$　$\frac{11}{9}$

$\frac{49}{40}$　$\frac{109}{89}$

$\frac{485}{396}$　$\frac{1079}{881}$

$\frac{4801}{3920}$　$\frac{10681}{8721}$

$\frac{47525}{38804}$

$A=-1$　$A=\frac{1}{2}$

$K=10$

Kは

$11\times10-1=109$

の漸化式の

×10に表われる

数値

Aは $\sqrt{B}\fallingdotseq\frac{M}{N}$ について

$M^2+A=B\cdot N^2$

によって求められるAの数値

# 表の作成（2）

| | | |
|---|---|---|
| | | $\frac{1}{1}$ |
| $\frac{5}{4}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{11}{9}$ |
| $\frac{49}{40}$ | $\frac{60}{49}$ | $\frac{109}{89}$ |
| $\frac{485}{396}$ | | $\frac{1079}{881}$ |
| $\frac{4801}{3920}$ | | $\frac{10681}{8721}$ |
| $\frac{47525}{38804}$ | | |

# $\sqrt{\frac{3}{2}}$ の近似分数の表

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = 1 + (4, 2)_n \qquad K = 10$$

| $A = -1$ | $A = \frac{3}{2}$ | $A = \frac{1}{2}$ |
|---|---|---|
| $\frac{1}{0}$ | $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{1}$ |
| $\frac{5}{4}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{11}{9}$ |
| $\frac{49}{40}$ | $\frac{60}{49}$ | $\frac{109}{89}$ |
| $\frac{485}{396}$ | $\frac{594}{485}$ | $\frac{1079}{881}$ |
| $\frac{4801}{3920}$ | $\frac{5880}{4801}$ | $\frac{10681}{8721}$ |
| $\frac{47525}{38804}$ | $\frac{58206}{47525}$ | $\frac{105731}{86329}$ |

注意した点、

① 分数の世界で考えました。

② 手計算で簡単に計算できること
を条件にしました。

文責
林　邦英