複利計算について

[テーマ]

複利 R% のとき元利合計が元金の2倍となる年数 (x) を求める簡易計算式を作る。

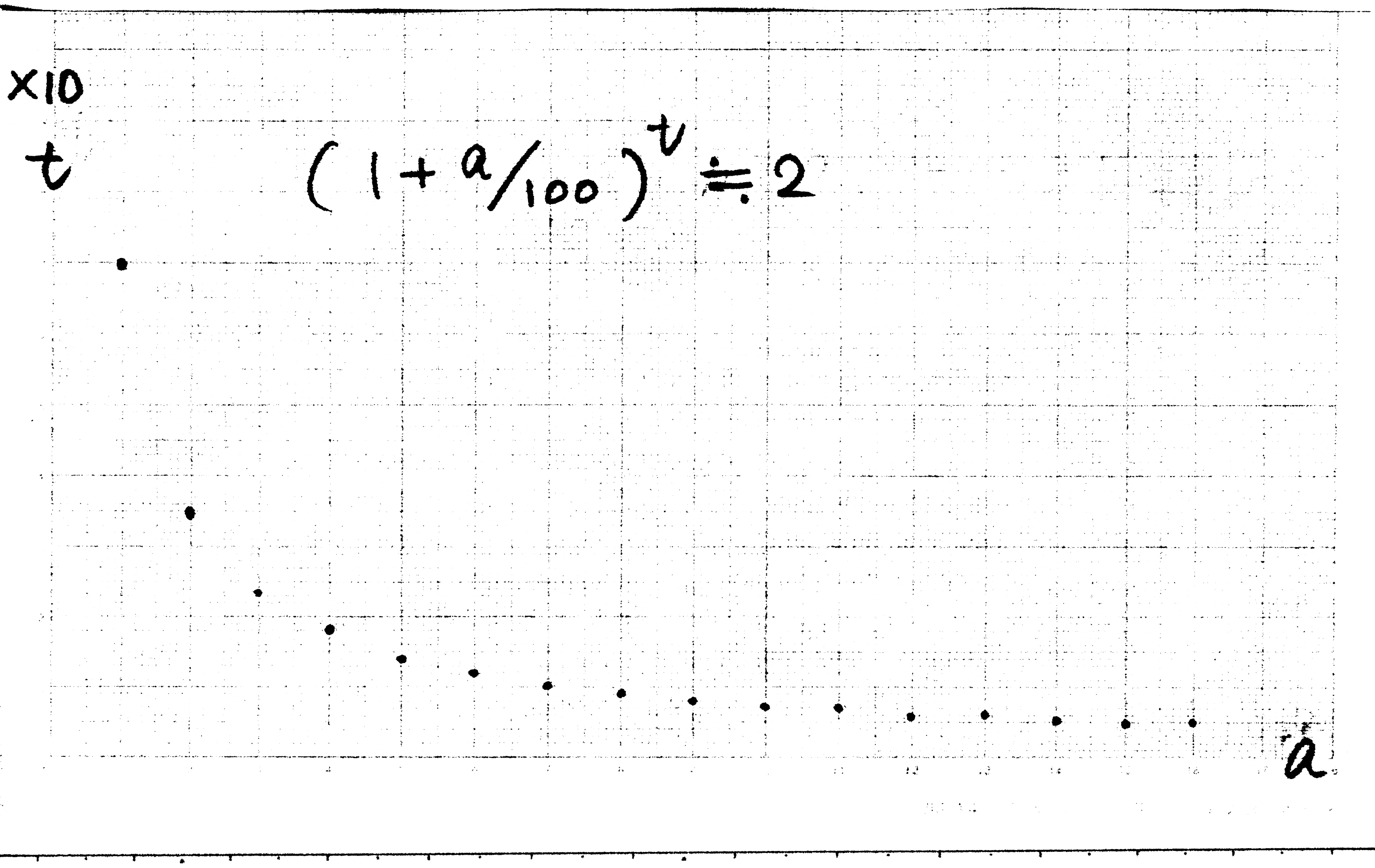
8桁電卓を使い Rを変化させ 2に近づくまでの回数を調べました。

R=8 の場合は、

1.08 × ========= 1.9990044

$1.08^9 \fallingdotseq 2$ となりました。

1.01	(70)	69 → 1.986	70 → 2.006
1.02	(35)	35 → 1.999	
1.03	(23.5)	23 → 1.973	24 → 2.032
1.04	(18)	17 → 1.947	18 → 2.025
1.05	(14)	14 → 1.979	15 → 2.078
1.06	(12)	11 → 1.898	12 → 2.012
1.07	(10)	10 → 1.967	11 → 2.104
1.08	(9)	9 → 1.999	
1.09	(8)	8 → 1.992	9 → 2.171
1.1	(7)	7 → 1.948	8 → 2.143
1.11	(7)	6 → 1.870	7 → 2.076
1.12	(6)	6 → 1.973	7 → 2.210
1.13	(6)	5 → 1.842	6 → 2.081
1.14	(5)	5 → 1.925	6 → 2.194
1.15	(5)	4 → 1.749	5 → 2.011
1.16	(5)	4 → 1.810	5 → 2.100



グラフを作って観察すると

$y = N/x$

反比例の式に形が似ています。

R(%)	回数(t)	R×t
1	70	70
2	35	70
3	23.5	70.5
4	18	72
5	14	70
6	12	72
7	10	70
8	9	72
9	8	72
10	7	70

R = 2 の場合を使って

$2 \times 35 = 70 \qquad x \fallingdotseq 70/R$

R = 8 の場合を使って

$8 \times 9 = 72 \qquad x \fallingdotseq 72/R$

この2つの式を合成します。

$8 - 2 = 6$

$72 - 70 = 2$

$2 \div 6 = 1/3$

$$\{70 + 1/3\,(R-2)\}/R$$
$$= \{70 + 1/3\,R - 2/3\}/R$$
$$= \{69\tfrac{1}{3} + 1/3\,R\}/R$$
$$= (69\tfrac{1}{3})/R + 1/3$$
$$\fallingdotseq 69.333/R + 0.333$$

二宮市三さんにいただいた手紙の一部です。

複利計算の話しから始めましょう．複利 R% のとき元金合計が元金の N 倍になる年数を x とすると，数学を使えば $N = (1 + R/100)^x$ という式が成り立ちます．同じことを対数を使って書くと $\log N = x \log(1 + R/100)$ となり x について解けば $x = \log N/\log(1 + R/100)$ が得られます．$N = 2$ なら $\log 2 = 0.69314718\cdots$ ですから $x = 0.69314718/\log(1 + R/100)$ となり，これで完全に解けています．例えば $R = 2$ なら関数卓電で $\log 1.02 = 0.019802627\cdots$ を出し割り算で $x = 35.00278\cdots$ となり，$R = 8$ なら $\log 1.08 = 0.07696104\cdots$ から $x = 9.006\cdots$ となります．$\log(1+u) \approx u - u^2/2 + u^3/3 - \ldots$ と無限級数に展開できて $1/\log(1+u) \approx 1/u(1 - u/2 + u^2/3 - \cdots) \approx (1 + u/2)/u = 1/u + 1/2$ と近似でき $N = 2$ となる年数は $x \approx 69.314718/R + 0.346$ と書けます

No.

Date

5

複利 R% のとき元利合計が元金のN倍になる年数をxとすると

$N = (1 + R/100)^x$

$\log N = x \log(1 + R/100)$

xについて解くと

$x = \log N / \log(1 + R/100)$

N=2の場合

$\log 2 = 0.69314718\cdots\cdots$

$x = 0.69314718\cdots\cdots / \log(1 + R/100)$

$\log(1+U) \approx U - U^2/2 + U^3/3 - \cdots\cdots$

と無限級数に展開できます。

$1/\log(1+U) \approx 1/U\,(1 - U/2 + U^2/3 - \cdots\cdots)$

$\approx (1+U/2)/U = 1/U + 1/2$

と近似できます。（Uが0に近い場合）

6

$1/U\,(1 - U/2 + U^2/3 - \cdots\cdots)$

$\approx (1+U/2)/U = 1/U + 1/2$

についての説明

Uが0に近い場合 の近似ですから

$1/(1-a) \fallingdotseq 1 + a$ を確かめます。

$a = 0.1$ （$R = 10$）

$1 \div 0.9 = 1.111\cdots\cdots \fallingdotseq 1 + 0.1$

$a = 0.05$ （$R = 5$）

$1 \div 0.95 = 1.0526\cdots\cdots \fallingdotseq 1 + 0.05$

$a = -0.1$

$1 \div 1.1 = 0.909\cdots\cdots \fallingdotseq 1 - 0.1$

$a = -0.05$

$1 \div 1.05 = 0.952\cdots\cdots \fallingdotseq 1 - 0.05$

7

近似式は

$x \fallingdotseq 69.314718 / R + 0.346$

とすることができます。

$1/U + 1/2$ の式を使って

$x \fallingdotseq 69.333 / R + 0.333$ の式を補正します。

$69 \div 2 = 34.5$

$34.5 \div 100 = 0.345$

$70 - 0.345 \times 2 = 69.31$

$x \fallingdotseq 69.31 / R + 0.345$

となりました。

R=16の場合は

$69.31 / 16 + 0.345 = 4.676825$

関数電卓で確かめました。

$\log 2 / \log 1.16 = 4.670173539$

8

岐阜県の亀井喜久男さんの研究と、
二宮市三さんにいただいた手紙
を参考にしました。
ありがとうございます。

2007.3.18