1

平方根の近似分数について

ボンベリ型連分数

と

ユークリッド互除法による連分数

2

ラファエル・ボンベリさんの連分数

Rafael Bombelli (1526-1572)

(1) $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}$

(2) $y = 1 + \sqrt{2}$

(1) の両辺に 1 を加えて

(3) $y = 2 + \frac{1}{y}$

(3) を (1) に代入

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}} = 1 + \frac{1}{2+}\ \frac{1}{y}$$

無限連分数

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2+} \cdots\cdots$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2+}\ \frac{1}{2} = \frac{7}{5}$$

3

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \sqrt{2} - 1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{y}$$

$$y = 2 + \frac{1}{y}$$

4

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \sqrt{5} - 2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}+2}{1} = \sqrt{5}+2$$

$$\sqrt{5} + 2 = 4 + \frac{1}{y}$$

$$y = 4 + \frac{1}{y}$$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+}\ \frac{1}{4+}\ \frac{1}{4+}$$

No.

Date

No. 5

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \sqrt{7} - 2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{7} - 2}$$

$$y = \frac{\sqrt{7} + 2}{3}$$

$$3y = \sqrt{7} + 2$$

$$\sqrt{7} + 2 = 4 + \frac{1}{y}$$

$$3y = 4 + \frac{1}{y}$$

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{3}{4+}\,\frac{3}{4+}\,\frac{3}{4+}\,\cdots\cdots$$

No. 6

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \sqrt{11} - 3$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{11} - 3}$$

$$y = \frac{\sqrt{11} + 3}{2}$$

$$2y = \sqrt{11} + 3$$

$$\sqrt{11} + 3 = 6 + \frac{1}{y}$$

$$2y = 6 + \frac{1}{y}$$

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{2}{6+}\,\frac{2}{6+}\,\frac{2}{6+}\,\cdots\cdots$$

No. 7

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \sqrt{13} - 3$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{13} - 3}$$

$$y = \frac{\sqrt{13} + 3}{(\sqrt{13} - 3)(\sqrt{13} + 3)}$$

$$= \frac{\sqrt{13} + 3}{13 - 9} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4}$$

$$4y = \sqrt{13} + 3$$

$$\sqrt{13} + 3 = 6 + \frac{1}{y}$$

$$4y = 6 + \frac{1}{y}$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+}\,\frac{4}{6+}\,\frac{4}{6+}\,\cdots\cdots$$

$$3 + \frac{4}{6} = \frac{11}{3} \qquad 3 + \frac{4}{6+}\,\frac{4}{6} = \frac{18}{5}$$

No. 8

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\cdots\cdots$$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{4+}\,\cdots\cdots$$

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{3}{4+}\,\frac{3}{4+}\,\frac{3}{4+}\,\cdots\cdots$$

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{2}{6+}\,\frac{2}{6+}\,\frac{2}{6+}\,\cdots\cdots$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+}\,\frac{4}{6+}\,\frac{4}{6+}\,\cdots\cdots$$

$\sqrt{A^2 + a} \fallingdotseq A + \frac{a}{2A}$ を使って

$$\sqrt{7} = \sqrt{2^2 + 3} \fallingdotseq 2 + \frac{3}{4}$$

$$= 2 + \frac{3}{4+}\,\frac{3}{4+}\,\frac{3}{4+}\,\cdots\cdots$$

$$\sqrt{A^2 + a} = A + \frac{a}{2A+}\,\frac{a}{2A+}\,\cdots\cdots$$

No.

Date

ボンベリさんの連分数を効率よく求めようとすると

アラビアの方法

$$A+\frac{a}{2A} > \sqrt{A^2+a} > A+\frac{a}{2A+1}$$

の左半分が見えてきます。

$$A > \frac{A+B}{2} > \sqrt{A\cdot B} > \frac{2A\cdot B}{A+B} > B$$

との共通点とちがいについて考えてみて下さい。

$A+{}^{B}/_{C+}\ {}^{B}/_{C+}$ 型連分数を

普通の分数に直す BASIC プログラム

(CASIO FX-890P を使用)

```
5 PRINT " A+B/C+B/C+"
10 INPUT "A" ; A
20 INPUT "B" ; B
30 INPUT "C" ; C
40 INPUT T          (B/C+の回数)
50 D=B
60 E=C
70 N=1
80 F=B*E
90 G=C*E+D
100 D=F
110 E=G
120 N=N+1
```



```
130 PRINT A*E+D;/;E;
140 IF N=T GOTO 150
    ELSE GOTO 80
150 END
```

$\sqrt{7}=2+\frac{3}{4+}$ の場合は、

A=2, B=3, C=4 T=5

$\frac{11}{4}$ $\frac{50}{19}$ $\frac{233}{88}$ $\frac{1082}{409}$ $\frac{5027}{1900}$

平方根を分数で表わすことはできません。

そこで $\sqrt{B} \fallingdotseq M/N$ について

$M^2+A = B\cdot N^2$

として、A を調べてみます。

$\sqrt{2}$ の場合

3 / 2	$3^2+A=2\times2^2$	A = −1
7 / 5	$7^2+A=2\times5^2$	A = +1
17 / 12	$17^2+A=2\times12^2$	A = −1
41 / 29	$41^2+A=2\times29^2$	A = −1

$\sqrt{7}$ の場合

11 / 4	$11^2+A=7\times4^2$	A = −9
50 / 19	$50^2+A=7\times19^2$	A = +27
233 / 88	$233^2+A=7\times88^2$	A = +81
1082 / 409	$1082^2+A=7\times409^2$	A = +243

No.
Date

13

$\sqrt{2}$ の場合の A の変化 は.

$-1,\ +1,\ -1,\ +1$

ですが $\times(-1)$

$\sqrt{7}$ の場合 は.

$-9,\ +27,\ -81,\ +243$

$\times(-3)$

A は +1, −1 の場合. 計算がもっとも効率的になります。

$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{2+}$ と $\sqrt{3} = 2 - \frac{1}{4-}$

をくらべてみます。

A=1, B=2, C=2		A=2, B=−1, C=4	
4 / 2	(−4)	7 / 4	(−1)
10 / 6	(+8)	26 / 15	(−1)
28 / 16	(−16)	97 / 56	(−1)

14

$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{2+}$ の場合を約分します。

4 / 2	2 / 1	(−1)
10 / 6	5 / 3	(+2)
28 / 16	7 / 4	(−1)
76 / 44		
208 / 120		
568 / 328		
1552 / 896		
4240 / 2448		
11584 / 6688	(÷32) 362 / 209	(−1)
31648 / 18272		

約分をすることで −1 にすることができます。

15

$\sqrt{7}$ (約分形)

$3 - \frac{2}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

$3 - \frac{2}{6-}\frac{2}{6} = 3 - \frac{12}{34} = 3 - \frac{6}{17} = \frac{45}{17}$

$3 - \frac{2}{6-}\frac{2}{6-}\frac{2}{6-} = 3 - \frac{2}{6-}\frac{6}{17} = 3 - \frac{17}{48} = \frac{127}{48}$

$3 - \frac{2}{6-}\frac{2}{6-}\frac{2}{6-} = 3 - \frac{2}{6-}\frac{17}{48} = 3 - \frac{96}{271} = \frac{717}{271}$

3 / 1	$3^2 + A = 7 \times 1^2$	A = −2
8 / 3	$8^2 + A = 7 \times 3^2$	A = −1
45 / 17	$45^2 + A = 7 \times 17^2$	A = −2
127 / 48	$127^2 + A = 7 \times 48^2$	A = −1
717 / 271	$717^2 + A = 7 \times 271$	A = −2

$M^2 - 1 = 7 \cdot N^2$		$M^2 - 2 = 7 \cdot N^2$	
8	3	3	1
127	48	45	17
		717	271

16

$\sqrt{13}$ の場合

$\sqrt{3^2+4} = 3 + \frac{4}{6+}\frac{4}{6+}\frac{4}{6+}$

$\sqrt{4^2-3} = 4 - \frac{3}{8-}\frac{3}{8-}\frac{3}{8-}$

$3 + \frac{4}{6+}$	$4 - \frac{3}{8-}$
22 / 6	29 / 8
144 / 40	220 / 61
952 / 264	1673 / 464
6288 / 1744	12724 / 3529
41536 / 11520	96773 / 26840
274368 / 76096	736012 / 204133
1812352 / 502656	5597777 / 1552544
41536 (÷64) 11520	$29^2 + A = 13 \times 8^2$ A = −9
$649^2 + A = 13 \times 180^2$	$220^2 + A = 13 \times 61^2$ A = −27
A = −1	

ユークリッド式連分数について

$\sqrt{7} \fallingdotseq 2.6457513$ を使って

(8桁電卓を使用 SHARP ELSIMATE EL-326S)

CA

2.6457513 −2 = 0.<u>6457513</u>

M+ 1÷RM = 1.5485837 − 1 = CM M+

1÷RM = 1.8228758 − 1 = CM M+

1÷RM = 1.2152502 − 1 = CM M+

1÷RM = 4.6457564 − 4 = 0.<u>6457564</u>

$\sqrt{7} = 2 + (1, 1, 1, 4)_n$

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}$$

続く →

BASICでのプログラム

```
5   CLEAR
10  PRINT "RENBUNSUU; A"
20  INPUT "A"; A
30  INPUT "TIME"; T
40  N=1
50  PRINT FIX (A);"+";
60  B=1 / (FRAC (A))
70  PRINT FIX (B);
80  N=N+1
90  IF N=T THEN GOTO 120
100 A=B
110 GOTO 60
120 GOTO 5
```


$\sqrt{7} = 2 + (1.1.1.4)_n$

$\sqrt{13} = 3 + (1.1.1.1.6)_n$

になります。

簡単な分数に直す方法について考えます。

北海道の加藤香隆さんに教えていただきました。ありがとうございます。

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{3}{4+}\frac{3}{4+}\frac{3}{4+}$$

の計算は、

行列計算を使うと

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、前から順に計算することができます。　また、複雑な形の連分数にも対応できるものです。

$\sqrt{7} = 2 + (1.1.1.4)_n$ の場合は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sqrt{13} = 3 + (1.1.1.1.6)_n$ の場合は

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots$$ となります。

ちくま学芸文庫より

「オイラーの贈物」(吉田武著)

が出版されています。

P.336〜P.340が参考になります。

遊星社 発行 の

改訂版「コンピュータと素因子分解」(和田秀男著)

P.64 に $\sqrt{7} = 2.64575\cdots\cdots$

の例が書いてあります。

連分数 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$

を計算するプログラムを作ります。

計算結果を $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

としますので、次の数値は

$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$

E.F.G.H として入力します。

もっとも単純なものです。


```
10  CLEAR
20  INPUT A
30  INPUT B
40  INPUT C
50  INPUT D
60  INPUT E
70  INPUT F
80  INPUT G
90  INPUT H
100 I = A*E + B*G
110 J = A*F + B*H
120 K = C*E + D*G
130 L = C*F + D*H
140 PRINT I;J;K;L
```



```
150 A = I
160 B = J
170 C = K
180 D = L
190 GOTO 60
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 37 & 8 \\ 14 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 45 & 37 \\ 17 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 82 & 45 \\ 31 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 18 & 11 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 119 & 18 \\ 33 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 137 & 119 \\ 38 & 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 256 & 137 \\ 71 & 38 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 393 & 256 \\ 109 & 71 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 649 & 393 \\ 180 & 109 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4287 & 649 \\ 1189 & 180 \end{pmatrix}$$

No. 25

ボンベリ型連分数とユークリッド互除法による連分数のちがいについて考えて下さい。

$\sqrt{7}$ と $\sqrt{13}$ のちがいはどうでしょうか。

$\sqrt{B} \fallingdotseq M / N$ について

$M^2 + A = B \cdot N^2$ の式を使って

A の値を調べて下さい。

$\sqrt[3]{2}$ の場合はどうでしょうか。

No. 26

小数を分数に直す。

8桁電卓での数値です。

① $3 \div 8 = 0.375$

$1 \div 0.375 = 2.6666666 \quad -2$

$= 1.5000001 \quad -1$

$= 1.9999996$

$\fallingdotseq 2 \quad -2$

$\frac{1}{2+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

② $4 \div 17 = 0.2352941$

$1 \div 0.2352941 = 4.2500003 \quad -4$

$= 3.9999952$

$\fallingdotseq 4 \quad -4$

$\frac{1}{4+} \frac{1}{4} = \frac{4}{17}$

切り上げる条件が必要です。

No. 27

計算機は有効桁数がありますので、

「入力された小数値を表わす

最小近似分数を求める」

と考えた方がよいように思います。

求めた数値 $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{17}$

が $3 \div 8 =$

$4 \div 17 =$

として、入力された小数値になるのか

確かめる必要があります。

求められる分数は、有効桁数によって

制限されます。

No. 28

$1 \div 3 = 0.333\ 3333$

$1 \div 0.333\ 3333 = 3.000\ 0003$

3333333.3

3.3333333

3.0000003

これに対する対策を考えて下さい。