No.
Date

武田利一さんの「幻の0番法」について

高校数学の窓 の質問 <319>
の返事 (2000.9.14) より

① ニュートンさんの補間法を見ていて、数列に使えないかなと思い、考えついた方法です。

② 「第 n 階差が一定になるとき、もとの式は n 次関数となる」に着目しました。

③ 容易に n 次関数を求められる規則性はないかと考えました。

④ 初項(第1項)の前にあるだろう幻の0番目(第0項)に注目しました。

③の効率的な計算法を求めるために規則性をさがすことは、数学の根本である実用性という視点から考えて、大切なことだと思います。

2次関数 $y=ax^2+bx+c$
に $x=1,2,3\cdots$ を代入して、

0番目	①	②	③	④
c	$a+b+c$	$4a+2b+c$	$9a+3b+c$	$16a+4b+c$

$a+b$　$3a+b$　$5a+b$　$7a+b$

$2a$　$2a$　$2a$

なぜ 0番目を使うのか?

⊖1	0番目	①
$a-b+c$	c	$a+b+c$

$-a+b$　$a+b$　$3a+b$

$2a$　$2a$

0番目の a, b, c の組み合わせがもっとも簡単な形をしているからです。

3次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$
の場合は、

0番目	計算方法は、
d	$a\to b\to c\to\cdots$
$a+b+c$	の順に解きます。
$6a+2b$	一次方程式に計算は
$6a$	単純化されています。

階差を作り何次の関数かを知るだけではなく、"0番目"の数値を利用し、容易に元の関数を求める公式をみつけられました。

$3x^3+4x^2+5x+6$ の場合は、

0	1	2	3	4	5	6
6	18	56	138	282	506	828

12　38　82　144　224　322

26　44　62　80　98

18　18　18　18

$d=6$

$a+b+c=12$　　$3+4+c=12\to c=5$

$6a+2b=26$　　$18+2b=26\to b=4$

$6a=18$　　$\Rightarrow$　$a=3$

$y=ax^3+bx^2+cx+d$ について
$a=3,\ b=4,\ c=5,\ d=6$
が求められました。

4次の場合	5次の場合
e	f
a+b+c+d	a+b+c+d+e
14a+6b+2c	30a+14b+6c+2d
36a+6b	150a+36b+6c
24a	240a+24b
	120a

係数をとり出すと（5次）

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\
 & 30 & 14 & 6 & 2 & -2 \\
 & & 150 & 36 & 6 & -3 \\
 & & & 240 & 24 & -4 \\
 & & & & 120 & -5
\end{array}$$

係数の規則性

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & -1 \\
1\,(\times 1) & 1\,(\times 2) & & & & \\
1 & 2 & & & & -2 \\
1\,(\times 1) & 3\,(\times 2) & 2\,(\times 3) & & & \\
1 & 6 & 6 & & & -3 \\
1\,(\times 1) & 7\,(\times 2) & 12\,(\times 3) & 6\,(\times 4) & & \\
1 & 14 & 36 & 24 & & -4 \\
1\,(\times 1) & 15\,(\times 2) & 50\,(\times 3) & 60\,(\times 4) & 24\,(\times 5) & \\
1 & 30 & 150 & 240 & 120 & -5
\end{array}$$

見方を変えると、

a, b, c, … の成分ごとにとりつくしてゆくと、

3次の場合

ax^3+bx^2+cx+d について

$d = 6$

$a+b+c = 12$

$6a+2b = 26$

$6a = 18$

6　12　26　18

$3\times(0, 1, 6, 6)$

$-(0, 3, 18, 18)$

6　9　8　0

$4\times(0, 1, 2)$

$-(0, 4, 8)$

［解説］

「幻の0番」の公式のすぐれている点は、

① 0番目に注目したことです。

0番目の係数は簡単な規則になってあらわれます。

② 規則性をみつけることにより、全体の計算を分解し、より単純なものにしていることです。

平方数の和について、次の方法とくらべてみて下さい。

$$1\cdot\binom{n}{1}+3\cdot\binom{n}{2}+2\cdot\binom{n}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l}
1\times\dfrac{n!}{1!\,(n-1)!} = n \\
3\times\dfrac{n!}{2!\,(n-2)!} = \dfrac{3}{2}\cdot n\cdot(n-1) \\
2\times\dfrac{n!}{3!\,(n-3)!} = \dfrac{1}{3}\cdot n\cdot(n-1)(n-2)
\end{array}\right]$$

$$n+\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+\frac{1}{3}n^3-n^2+\frac{2}{3}n$$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$