平方根について

面積Aの正方形の一辺の長さをAの平方根という。

$\sqrt{A}$ で表わす。

数学教室2006.7を参考にしました。
ありがとうございます。

整数cm²の正方形を描く。

① 1、4、9、16 cm² の場合

$1^2=1$、$2^2=4$、$3^2=9$、$4^2=16$

② 2、8、18 cm² の場合

$2^2\div2=2$、$4^2\div2=8$、$6^2\div2=18$

③ 5、10、17、13、20 cm² の場合

$\frac{9-1}{2}+1=5$

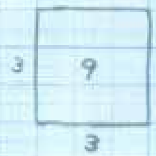
$\frac{16-4}{2}+4=10$

$\frac{25-9}{2}+9=17$

$\frac{25-1}{2}+1=13$

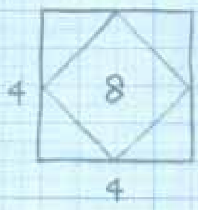
$\frac{36-4}{2}+4=20$

①



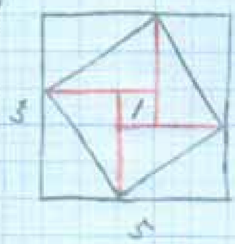
$3\times3=9$

②



$4\times4\div2=8$

③



$\frac{5\times5-1}{2}+1=13$

① の場合　A^2 型

② の場合　$2A^2$ 型

2×1^2、2×2^2、2×3^2

③ の場合　A^2+B^2 型

$5=4+1=2^2+1^2$

$10=9+1=3^2+1^2$

$17=16+1=4^2+1^2$

$13=9+4=3^2+2^2$

$20=16+4=4^2+2^2$

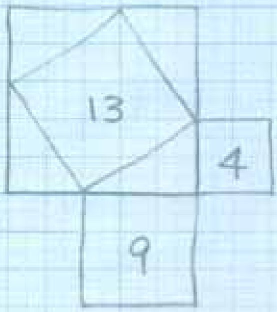
③ の場合を別の見方で考えると

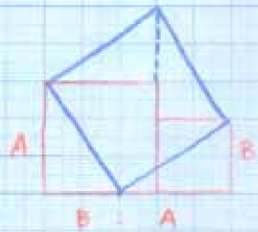
ピタゴラスの定理と

3、6、7、11、12、14、15、19 …… cm²

の正方形の描き方がわかります。

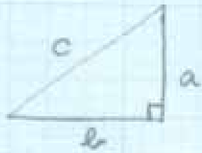
③の別の見方





ピタゴラスの定理

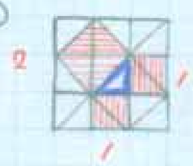
①



$a^2+b^2=c^2$

(三平方の定理)

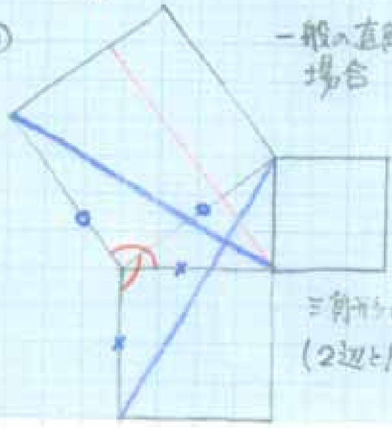
②



直角二等辺三角形の場合

1+1=2

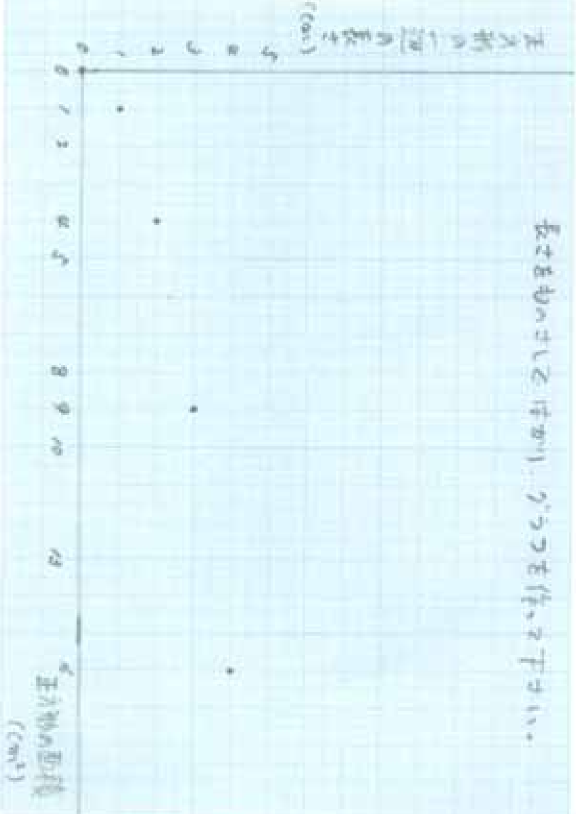
③



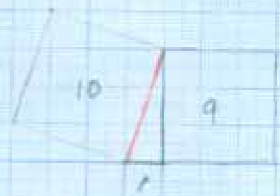
一般の直角三角形の場合

三角形の合同

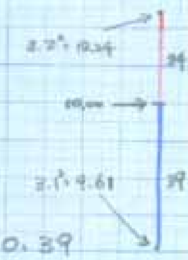
(2辺と間の角が等しい)



面積 10cm² の正方形の一辺の長さは



ものさしではかると、3.1cmと3.2cmの間の長さです。



$3.1^2 = 9.61$

$3.2^2 = 10.24$

区間を直線で近似すると、

$10 - 9.61 = 0.39$

$10.24 - 10 = 0.24$

$\frac{39}{39+24} = \frac{39}{63} = 0.6190476$

0.62として

$3.162^2 = 9.998244$

$\sqrt{10}$ をくわしく求める

（8桁電卓を使って）

$\sqrt{10} \fallingdotseq 3.162$ を使います。

$3.162^2 = 9.998244$

$10 - 9.998244 = 0.001756$

$0.001756 \div 2 \div 3.162 = 0.0002776$

$0.0002776^2 \div 2 \div 3.162 = 0$

$3.162 + 0.0002776 = 3.1622776$

$3.1622776^2 = 9.9999996$

使った式は

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A+B)^2 - A^2 = 2AB + B^2$

$(2AB + B^2) \div 2A = B + B^2/2A$

$A = 3.162$

$(A+B)^2 = 10$

説明

平方根の近似値の数値の続きを求めるには、

Aをわかっている数値

Bをわからない数値　として、

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

の式を変形することで求めることができます。

$B \fallingdotseq B + B^2/2A$ とするので、

元の数値の有効桁数の3倍が限度です。

計算をくふうします。

$0.001756 = 1.756 \div 10^3$

$1.756 \div 2 \div 3.162 \div 10^3 = 0.2776723 \div 10^3$

$17.56 \div 2 \div 3.162 \div 10^4 = 2.7767235 \div 10^4$

$0.0002776 = 2.776 \div 10^4$

$2.776^2 \div 2 \div 3.162 \div 10^8 = 1.2185609 \div 10^8$

$$
\begin{array}{rl}
 & 3.162 \\
+ & 0.000\ 2776\ 7235 \\
- & 0.000\ 0000\ 1218 \\
\hline
 & 3.162\ 2776\ 6017
\end{array}
$$

A

$B \quad + \quad B^2/2A$

$- \qquad B^2/2A$ （$B = 0.0002776$ として）

$\sqrt{10} \fallingdotseq 3.1622776017$

説明

電卓の有効桁を有効に利用するために、

小数点を移動させる必要があります。

計算する場合は、位取りに注意して下さい。

$\sqrt{10} \fallingdotseq 3.1622776$ を使って

3.1622776^2 を求め10より引く

3.162^2

$2 \times 3.162 \times 0.0002776$

0.0002776^2

10

−9.998244 0000 0000

− 1755 5424 0000

− 770 6176

0.000000 3805 3824

$38053824 \div 2 \div 3.1622776$

$= 6016837.9$

この割り算の続きを求めます。

$2 \times 31622776 = 63245552$

$(60160000 + 8379) \times (63240000 + 5552)$

3804 5184

3340 0832

5298 8796

4652 0208

3805 3823 9280 0208

3805 3824 0000 0000 より引くと

5719 9792

$57199792 \div 63245552$

$= 0.9044081$

$\div 6.3245552$ として

90440813

6016837990440813

$6.0168379^2 = 36.202338$

$36.202338 \div 2 \div 3.1622776$

$= 5.7240923$

	60168379 90440813	$B + B^2/2A$
−	57240923	$B^2/2A$
	33199890	

$\sqrt{10} \fallingdotseq 3.1622776601683 79$
33199890

($A = 3.1622776$ として)

($B = 6.0168379 \div 10^8$ として)

参考までに

$\sqrt{10} \fallingdotseq 3.1622776601683 79$
3319988935444327

（32桁の電卓による）

説明

8桁電卓を使った場合、24桁の近似値を求めることができます。

割り算の数値の続きは「あまり」に注意することで求められます。

平方根の近似値の表を作って観察して下さい。

$\sqrt{26}$、$\sqrt{27}$、$\sqrt{28}$ の場合はどうでしょうか。

分数を使って考える

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2+1} = 3 + \boxed{\sqrt{10}-3}$$

$$= 3 + \frac{\sqrt{10}-3}{1}$$

$$= 3 + \frac{\sqrt{10}-3}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}$$

$$= 3 + \frac{1}{\sqrt{10}+3}$$

$$= 3 + \boxed{\frac{1}{6+\boxed{\sqrt{10}-3}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{6+\boxed{\cfrac{1}{6+\sqrt{10}-3}}}$$

これを8桁電卓を使って確かめてみます。

$\sqrt{10} \fallingdotseq 3.16227766$ を使って

3.16227766	− 3	= 0.16227766
1 ÷ 0.16227766		= 6.1622799
6.1622799	− 6	= 0.1622799
1 ÷ 0.1622799		= 6.1621926
6.1621926	− 6	= 0.1621926
1 ÷ 0.1621926		= 6.1655094
6.1655094	− 6	= 0.1655094
1 ÷ 0.1655094		= 6.0419529
6.0419529	− 6	= 0.0419529
1 ÷ 0.0419529		= $\boxed{23}$.836259

8桁電卓では有効桁数以下が切り捨てられますので、計算誤差に注意する必要があります。

計算を式を使って再確認します。

$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{3^2+1}$ これより、

$\sqrt{10} - 3$

$$\frac{1}{\sqrt{10}-3} = \frac{\sqrt{10}+3}{(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)}$$

$$= \frac{\sqrt{10}+3}{10-9} = \frac{\sqrt{10}+3}{1} = \sqrt{10}+3$$

$$= 6 + \sqrt{10} - 3$$

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + }}$$

の形になります。

どこまでも 6 が続きます。

説明

電卓を使って連分数を作る方法です。
電卓では、平方根の近似値は、小数で表示されますが、分数の世界で考えることで、平方根の性質をより理解できるのではと思います。

No.

Date

$$3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$$

$$3\frac{1}{6+\frac{1}{6}} = 3\frac{1}{\frac{37}{6}} = 3\frac{6}{37} = \frac{117}{37}$$

$$3\frac{1}{6+\frac{1}{6+\frac{1}{6}}} = 3\frac{1}{6+\frac{1}{\frac{37}{6}}} = 3\frac{1}{6+\frac{6}{37}}$$

$$= 3\frac{1}{\frac{228}{37}} = 3\frac{37}{228} = \frac{721}{228}$$

$$3^2 + 1 = 10 \times 1^2$$
$$19^2 - 1 = 10 \times 6^2$$
$$117^2 + 1 = 10 \times 37^2$$
$$721^2 - 1 = 10 \times 228^2$$

3 ①$_{+1}$ 1

$6 = 3 \times 2$ 　 19 ②$_{-1}$ 6

$117 \times \boxed{6} + 19$ 　 117 ③$_{+1}$ 37 　 $37 \times 6 + 6$

721 ④$_{-1}$ 228

$721 \times 6 + 117$ 　 $228 \times 6 + 37$

4443 ⑤$_{+1}$ 1405

$4443 \times 6 + 721$ 　 $1405 \times 6 + 228$

27379 ⑥$_{-1}$ 8658

$27379 \times 6 + 4443$ 　 $8658 \times 6 + 1405$

168717 ⑦$_{+1}$ 53353

①$_{+1}$ $\frac{3}{1} + \frac{1}{2 \times 3 \times 1} = \frac{19}{6}$ ②

②$_{-1}$ $\frac{19}{6} - \frac{1}{2 \times 19 \times 6} = \frac{721}{228}$ ④

④$_{-1}$ $\frac{721}{228} - \frac{1}{2 \times 721 \times 228} = \frac{1039681}{328776}$ ⑧

168717 ⑦$_{+1}$ 53353

$168717 \times 6 + 27379$ 　 $53353 \times 6 + 8658$

1039681 ⑧$_{-1}$ 328776

$$\frac{1039681}{328776} > \sqrt{10} > \frac{168717}{53353}$$

$\sqrt{10} \fallingdotseq \frac{M}{N}$ とし

$M^2 + A = 10 \times N^2$

A 　 $+1$ 　 -1

$(-3\ /\ 1)\ (1\ /\ 0)$

$3\ /\ 1$ 　 $19\ /\ 6$

$117\ /\ 37$ 　 $721\ /\ 228$

$4443\ /\ 1405$ 　 $27379\ /\ 8658$

$168717\ /\ 53353$ 　 $1039681\ /\ 328776$

$721 \times 38 - 19 = 27379$

$228 \times \boxed{38} - 6 = 8658$

$38 = 19 \times 2$

×6 と ×38 では計算が少しちがいます。

$\sqrt{2}$ を求める　（分数を使って）

$\dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$　　$\dfrac{2\times 2}{3} = \dfrac{4}{3}$

$\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2} = \dfrac{17}{12}$　　$\dfrac{2\times 12}{17} = \dfrac{24}{17}$

$\dfrac{\frac{17}{12}+\frac{24}{17}}{2} = \dfrac{577}{408}$　　$\dfrac{2\times 408}{577} = \dfrac{816}{577}$

$\dfrac{\frac{577}{408}+\frac{816}{577}}{2} = \dfrac{665857}{470832}$

$3 \div 2 =$	1.5
$4 \div 3 =$	1.3333333
$17 \div 12 =$	1.4166666
$24 \div 17 =$	1.4117647
$577 \div 408 =$	1.4142156
$816 \div 577 =$	1.4142114
$665857 \div 470832 =$	1.4142135

$3^2 - 1 = 2 \times 2^2$

$4^2 + 2 = 2 \times 3^2$

$17^2 - 1 = 2 \times 12^2$

$24^2 + 2 = 2 \times 17^2$

$577^2 - 1 = 2 \times 408^2$

$816^2 + 2 = 2 \times 577^2$

これより

$665857^2 - 1 = 2 \times 470832^2$

$\dfrac{665857}{470832} - \dfrac{1}{2\times 665857 \times 470832}$

$1 \div 2 \div 6.6 \div 10^5 \div 4.7 \div 10^5$

$\fallingdotseq 0.016 \div 10^{10}$

$\fallingdotseq 1.6 \div 10^{12}$

誤差の大きさ（数値の有効桁数）

約 $1.6 \div 10^{12}$ だけ大きくなります。

平方数の数表づくりと観察

① 数表づくり

(ア) 1つづつかけ算をして求める方法

(イ) $(N+1)^2 = N^2 + 2N + 1$ を利用する方法

(ウ) 1の位、10の位、それ以上の桁の数字のならび方の規則性を利用する方法

② 平方数の数列の和について

(ア) 1^2 から 10^2 までの和は？

(イ) 1^2 から 100^2 までの和は？

③ 平方根の近似値を求める

(ア) 平方数の下2桁が00に近い場合をさがす。
平方数の上2桁が $A^2 \cdot B$ になる場合をさがす。

(イ) 8桁電卓を使って

・$\sqrt{10}$ の場合 (a) $31^2 = 961$　$32^2 = 1024$ を使って
(b) $95^2 = 9025$ を使って

・$\sqrt{2}$ の場合 (a) $14^2 = 196$　$99^2 = 9801$ を使って
(b) 精度を良くする方法は？

(ウ) $51^2 = 2601$　$52^2 = 2704$　$53^2 = 2809$
を使った観察は？

$\frac{577}{408}$ を使って

$$577 = 1 \times 408 + 169$$
$$408 = 2 \times 169 + 70$$
$$169 = 2 \times 70 + 29$$
$$70 = 2 \times 29 + 12$$
$$29 = 2 \times 12 + 5$$
$$12 = 2 \times 5 + 2$$
$$5 = 2 \times 2 + 1$$
$$2 = 2 \times 1$$

$$\frac{577}{408} = 1 + \frac{169}{408}$$
$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{70}{169}}$$
$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{29}{70}}}$$
$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{12}{29}}}}$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$
$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{17}{12}$$
$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{5}{12}} = 1 + \frac{12}{29} = \frac{41}{29}$$
$$1 + \cfrac{1}{2 + \frac{12}{29}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{70}{29}} = \frac{99}{70}$$

$(1^2 + 1 = 2 \times 1^2)$

$$3^2 - 1 = 2 \times 2^2$$
$$7^2 + 1 = 2 \times 5^2$$
$$17^2 - 1 = 2 \times 12^2$$
$$41^2 + 1 = 2 \times 29^2$$

+2	−1	+1
		$\frac{1}{1}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$
$\frac{24}{17}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$
	$\frac{99}{70}$	$\frac{239}{169}$
	$\frac{577}{408}$	

計算方法がちがうと出てくる分数もちがいます。

$$\begin{cases} 99 \times 6 - 17 = 577 \\ 70 \times 6 - 12 = 408 \end{cases}$$

$$99 \times 2 + 41 = 239$$
$$70 \times 2 + 29 = 169$$
$$239^2 + 1 = 2 \times 169^2$$

$$\begin{cases} 7 \times 2 + 3 = 17 \\ 5 \times 2 + 2 = 12 \end{cases}$$