はじめに

数学における実験と観察について

実験と観察である以上、物理的方法と化学的方法があるはずだということで、それが何かも考えてきたが今だわかりません。おもに数表づくりと数値分析をしています。

G先生の理科1の授業

地球の内部がどうなっているのかを知るには?

1、穴を掘る、(直接たしかめる)

2、地球の内部から出てくるものを調べる。(火山の噴出物など)〔化学的方法〕

3、地震によって発生するS波とP波の伝わり方を調べる。〔物理的方法〕

地球化学、地球物理を例としてとりあげ、物理と化学は分野のちがいではなく、対象に対する方法のちがいであるということを、強調されていました。

M進法における 1/N について

問1 かけ算の表の一部分です。何進法のどの部分か。

(ア) $\begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$ (イ) $\begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 15 & 23 \end{bmatrix}$ (ウ) $\begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 20 & 24 \end{bmatrix}$

問2 1÷7の循環節の長さが1ケタ、2ケタになるのは何進法か。

問3 1÷5の循環節です。何進法か。

(ア) $0.\dot{1}46\dot{3}$

(イ) $0.\dot{1}25\dot{4}$

かけ算の表

2進法から10進法までの表を作って下さい。九九とは少しちがいます。

0×0から始まり、10×10=100で終わります。

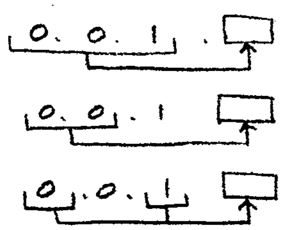
〔5進法の例〕

	0	1	2	3	4	10
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	10
2	0	2	4	11	13	20
3	0	3	11	14	22	30
4	0	4	13	22	31	40
10	0	10	20	30	40	100

数列の規則性は?

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4,
5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1,
5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9,
0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6,
5, ・・・・・

周期のある数列です。条件(mod)を変化させて周期の長さを調べてみて下さい。



と変化させるとどうでしょうか。

わり算

2進法から10進法までの $1/N$ の表をつくって観察してみて下さい。

［6進法での 1÷8の場合］

```
        0. 0 4 3
    8 ) 1
       -0
×6      1  6
          -0
×6         6
           3 6
          -3 2
×6           4
             2 4
            -2 4
               0
```

注意
6進法で8は
12と表記しますが、
10進法表記の8を
そのまま使います。
計算は10進法で
行ないます。

0. 0 4 3

$$\frac{0}{6}+\frac{4}{6^2}+\frac{3}{6^3}=\frac{24+3}{6^3}=\frac{27}{6^3}=\frac{1}{8}$$

10進法の 1÷7 は

```
        0. 1 4 2 8 5 7
    7 ) 1
       -0                    あまり
×10     1  0                   1
          -7                   ↓
×10        3  0                3
          -2  8                ↓
×10           2  0             2
             -1  4             ↓
×10              6  0          6
                -5  6          ↓
×10                 4  0       4
                   -3  5       ↓
×10                    5  0    5
                      -4  9    ↓
                          1    1
```

```
  142      3. 2. 6
+ 857    + 4. 5. 1
  999      7. 7. 7
```

あまりに1がでてきたので1に戻る。

10進法での $1/N$（Nは1から100）の表つくり

［1÷49 の例（8ケタ電卓を使って）］

1÷49＝0.0204081

408×49 ＝ 19992　1000−992＝8

8÷49＝0.1632653

265×49＝12985　1000−985＝15

15÷49 ＝0.3061224

122×49 ＝ 5978　1000−978＝22

22÷49 ＝0.4489795

979×49 ＝ 47971　1000−971＝29

29÷49 ＝0.5918367

836×49 ＝ 40964　1000−964＝36

36÷49 ＝ 0.7346938

693×49 ＝ 33957　1000−957＝43

43÷49 ＝ 0.877551

755×49 ＝ 36995　1000−995＝5

5÷49 ＝ 0.1020408

551×49 ＝ 26999　1000−999＝1

1÷49 ＝

$0.\dot{0}20408$　163265　306122
448979　591836　734693
$87755\dot{1}$

1÷49の循環節を使って。

```
  020408
  163265
  306122
  448979
  591836
  734693
+ 877551
 3142857
   ↓
  142857
```

M進法での1/Nの循環節の長さ

CASIO FX-890P (BASICプログラム)
注意 NがMの約数の倍数のときでは使えない。

```
10  CLEAR
20  PRINT "Mシンホウ"
30  INPUT   M
40  PRINT " 1 /N"
50  INPUT   N
60  L = 0
70  A = M
80  B =  A  MOD  N
90  L = L + 1
100 IF= B= 1 THEN 130 ELSE 110
110  A= B * M
120  GOTO 80
130  PRINT L
140  GOTO 10
```


M進法での1/Nの循環節の長さについて

M=10　N=7
M=10　$N=7^2=49$
M=10　$N=7^3=343$
の循環節の長さは?

M=10　N=17
M=10　N=19
M=10　N=17×19=323
の循環節の長さは?

M=7　N=5
M=7　$N=5^2=25$
M=7　$N=5^3=125$
の循環節の長さは?

M進法での1/Aのあまりの数列

```
10  CLEAR
20  PRINT "Mシンホウ"
30  INPUT   M
40  PRINT "1/A"
50  INPUT   A
60  N=0
70  PRINT 1;
80  B = M
90  C = B  MOD A
100 PRINT C;
110 N = N+1
120 IF C=1 THEN 160 ELSE 130
130 IF N >A THEN 160 ELSE 140
140 B = C * M
150 GOTO 90
160 END
```


あまり数列の実験例

{10進法での1÷7の例}

3. 2. 6. 4. 5. 1. 3. 2
6. 4. 5. 1. 3. 2. 6
4. 5. 1. 3. 2. 6. 4. 5
1. 3. 2. 6. 4. 5. 1
3 2 6 4 5. 1. 3. 2

{10進法での1÷49の例}

10	2	20	4	40	8
31	16	13	32	26	15
3	30	6	11	12	22
24	44	48	39	47	29
45	9	41	18	33	36
17	23	34	46	19	43
38	37	27	25	5	1

M進法における1/N について

① N が M の成分だけでできている場合は割り切れる。

（例）10進法で $1/8$ の場合

$1/8 = 0.125$　$8=2^3$　$10=2\times5$

2^3 の次数3 が割り切れるまでの桁数になる。

② N が M−1 の場合

（例）10進法で $1/9$ の場合

$1/9 = 0.\dot{1}$　$10-1=9$　$9=3^2$

$1/3 = 0.\dot{3}$

循環節の長さは1桁になる。$9=3^2$と分解できるので $1/3$ の場合も同様に1桁となる。

③ N が M+1 の場合

（例）10進法で $1/11$ の場合

$1/11 = 0.\dot{0}\dot{1}$

循環節の長さは2桁になる。

9進法においての $1/N$ について

$1/2$ 循環節は1桁。　(0+1)

$1/3$ 1桁で割り切れる。　(1+0)

$1/4$ 循環節は1桁。　(0+1)

$1/5$ 循環節は2桁。　(0+2)

$1/6$ 固定桁が1桁、循環節は1桁。　(1+1)

$1/7$

$1/8$ 循環節は1桁。　(0+1)

$9-1=8=2^3$

$9+1=10=2\times5$

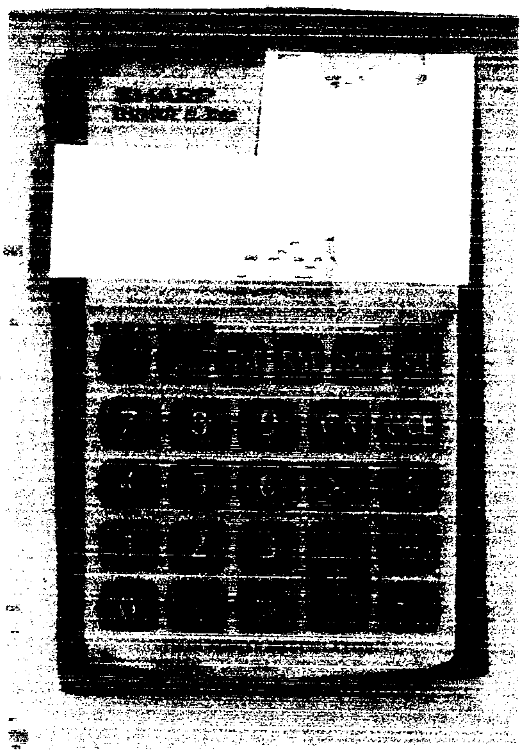
$9=3\times3$

7以外の2から8 は予測できる。

7の場合の循環節は3。$3=(7-1)/2$

$1/7 = 0.\dot{1}2\dot{5}$（9進法）

$(9^3-1)/7=104=1\times81+2\times9+5\times1$



1÷49の観察

8桁電卓を使用します。

1÷49= 0.0204081

100÷49=2.0408163

こうすることで2桁多く求めることができます。さらに続きを求めます。

0.0204081

408を使います。

408×49 = 19992

20000 − 19992 = 8

8÷49= 0.1632653

408の続きは

1632653 となります。

265を使って同様の計算をすると、

265の続きを求めることができます。

これを「電卓による尺取虫法」といいます。

No.
Date

No. 16

1÷49の循環節を求める。

一般に電算の計算において、有効桁数以下は切りすてられます。最後の一桁を使わないのは、計算結果をつなぐ時の目印にするためです。あまりは割る数よりも小さいので、あまりを求めるために「408」「265」を使うだけで充分です。

1÷49 =

0.$\dot{0}$2040816326530612244 8979591836734693877551$\dot{}$

42個の数字をくり返します。

No. 17

山路主住(1704－1773)

さんの循環小数の研究。

山路主住さんは あまりを詳しく調べて、大きな割り算を何人かで分担して行う方法を発見した。

たとえば 10番目のあまりを使って
20番目、40番目、80番目のあまりを
求めることで
21番目、41番目、81番目からの
計算を同時に行うことが可能となった。
この方法の発見により、大きな循環小数の研究が可能になったのだと思う。

No. 18

1÷49の計算のあまりの観察

0.	0	2	0	4	0	8	1	6	3	2
⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
1	10	2	20	4	40	8	80 ↓ 31	16	160 ↓ 13	32

偶数番目のあまりに注意します。

②	④	⑥	⑧	⑩
2	4	8	16	32
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5

n番目の あまりとは、別の見方をすると

$10^n \div 49$ の あまり

と見ることができます。

③ ⑥ ⑨ の場合でも確かめて下さい。

No. 19

$10^n \div 49$ のあまりの表

②	$10^2 \to 2$	$(10^2)^1 \to 2$
④	$10^4 \to 4$	$(10^2)^2 \to 2^2$
⑥	$10^6 \to 8$	$(10^2)^3 \to 2^3$
⑧	$10^8 \to 16$	$(10^2)^4 \to 2^4$
⑩	$10^{10} \to 32$	$(10^2)^5 \to 2^5$

$10^2 \div N$ のあまりを a とすると
$(10^2)^r \div N$ のあまりは
$a^r \div N$ のあまりとなる。

このように言えないだろうか。

No.
Date

No. 20

一般化して考える。

A÷Cのあまりを a
B÷Cのあまりを b とすると
(A×B)÷C のあまりは
(a×b)÷Cのあまりである。
これを確かめる実験

$$\begin{cases} 8 \div 7 \to 1 \\ 8 \div 7 \to 1 \end{cases} \quad (8 \times 8) \div 7 \to 1$$

$$\begin{cases} 9 \div 7 \to 2 \\ 9 \div 7 \to 2 \end{cases} \quad (9 \times 9) \div 7 \to 4$$

$$\begin{cases} 10 \div 7 \to 3 \\ 9 \div 7 \to 2 \end{cases} \quad (10 \times 9) \div 7 \to 6$$

$$\begin{cases} 10 \div 7 \to 3 \\ 10 \div 7 \to 3 \end{cases} \quad (10 \times 10) \div 7 \to 2$$

(9)

No. 21

証明の一例

$A = mc + a$
$B = lc + b$ とする。
$(A \times B) \div c$
$= (mc + a)(lc + b) \div c$
$= (mc \cdot lc + mc \cdot b + a \cdot lc + a \cdot b) \div c$
$= c(mlc + mb + al) \div c + ab \div c$
$c(mlc + mb + al) \div c$ は cで割りきれるので あまりは.
$ab \div c$ によって求めることができる。
これにより
$A^2 \div c$ のあまりは
A=B の場合なので
$a^2 \div c$ によって求めることができる。

No. 22

拾璣算法(1769)について

久留米藩主 有馬頼徸(1714-1783)さんは 大名の地位を利用し関流の密伝を公にした。その中に大きな割り算の循環節の長さを求める問題がある。
3つの規則によって成り立っている。

ア. 成分の保存則
割る数を素数に分解する。

イ. 最小公倍数の規則性
個々の素数の循環節の長さを求めその最小公倍数を求める。

う. 定数倍の規則性
同じ素数が2つ以上ある場合、2つ目からは、その数をかける。

No. 23

1÷14399の例

$14399 = 7 \times 11 \times 11 \times 17$
$1 \div 7 \to 6$ 桁
$1 \div 11 \to 2$ 桁
$1 \div (11 \times 11) \to 2 \times 11 = 22$ (桁)
$1 \div 17 \to 16$ 桁

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 6 & 22 & 16 \\ \hline & 3 & 11 & 8 \end{array}$$

$2 \times 3 \times 11 \times 8 = 528$
1÷14399 の循環節の長さは
528 桁になる。
多くの割り算の結果を表にして規則性をみちびき出したのだと思う。

1÷49の循環節を等分して加える。

42個の数字を、
2等分、3等分、6等分して加えます。
9がたくさんならびます。
7等分を確かめます。

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 02 & 04 & 08 \\
 & 16 & 32 & 65 \\
 & 30 & 61 & 22 \\
 & 44 & 89 & 79 \\
 & 59 & 18 & 36 \\
 & 73 & 46 & 93 \\
+ & 87 & 75 & 51 \\
\hline
\boxed{3} & 14 & 28 & 54 \\
 & 14 & 28 & 57
\end{array}
$$

成分の保存則

1÷49の循環節は42桁です。
$49 = 7 \times 7$
1÷7の循環節は6桁です。
$42 = 6 \times 7$
42桁を7等分して加えると、
1÷7の循環節が現われました。
$17 \times 19 = 323$
1÷323の循環節を等分して加え、
1÷17、1÷19の循環節とくらべてみると、この性質の意味がもっと良くわかります。
1÷N の循環節の長さを予測する場合に、Nを素数に分解することの意味はここにあります。

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

説明 その1

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b) \times (a+b) \\
&= (a+b) \times a + (a+b) \times b \\
&= a^2 + ab + ab + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

説明 その2

	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

図より
$(a+b) \times (a+b)$
$= a^2 + 2ab + b^2$

説明 その3

$21^2 = (20+1)^2 = 400 + 40 + 1$
$= 441$
$22^2 = 441 + 42 + 1 = 484$

$(a+b)^n$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
&\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \\
&= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\
&\quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\
&= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}
$$

係数をとり出す

$(n=0)$	(1)
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1

1.1^n (電卓では $1.1 \times = = =$)

$1.01^1 = 1.01$

$1.01^2 = 1.0201$

$1.01^3 = 1.030301$

$1.01^4 = 1.040604(01)$

$1.01^5 = 1.05101(00501)$

$1.01^6 = 1.0615201(50601)$

$1.1^1 = 1.1$

$1.1^2 = 1.21$

$1.1^3 = 1.331$

$1.1^4 = 1.4641$

$1.1^5 = 1.\underline{6}1051$

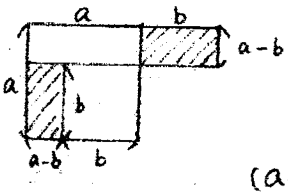
$1.1^6 = 1.\underline{77}1561$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

説明 その1

$$(a+b)(a-b) = (a+b)\times a - (a+b)\times b$$
$$= a^2 + ab - ab - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$

説明 その2



斜線の部分の面積は $(a-b)\times b$ で等しい。

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

説明 その3

$41 \times 39 = (40+1)\times(40-1)$
$= 1599 = 1600 - 1$

$42 \times 38 = (40+2)\times(40-2)$
$= 1596 = 1600 - 4$

$a^n - 1$

$a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$

$$\begin{array}{r l}
 & a^2 + a + 1 \\
a-1 \,\big) & a^3 + 0 + 0 - 1 \\
 & -(a^3 - a^2) \\ \hline
 & a^2 \\
 & -(a^2 - a) \\ \hline
 & a - 1 \\
 & -(a - 1) \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

$a^4 - 1 = (a-1)(a^3 + a^2 + a + 1)$

数値によってたしかめる。

$10^4 - 1 = 9999$
$= 9 \times 1111$
$= (10-1)(10^3 + 10^2 + 10 + 1)$

$a^5 - 1 = (a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$

$9^4 - 1 = 6561 - 1$
$= 6560$
$= 8 \times 820$
$= 8 \times (729 + 81 + 9 + 1)$
$= (9-1)(9^3 + 9^2 + 9 + 1)$

数列の規則性は？

0. 1. 1. 2. 3. 5. 8. 3. 1. 4.
5. 9. 4. 3. 7. 0. 7. 7. 4. 1.
5. 6. 1. 7. 8. 5. 3. 8. 1. 9.
0. 9. 9. 8. 7 ……

周期のある数列です。条件（mod）を変化させて、周期（P）の長さを調べてみて下さい。

0、0、1、$\boxed{}$

0、0、1、$\boxed{}$

0、0、1、$\boxed{}$

と変化させるとどうでしょうか。

数列の作り方

条件（mod＝10）の場合について
前２つの数を加えます。
10より大きくなったら10を引きます。

0＋1＝1　　5＋8＝13　13−10＝3

0. 1. 1. 2. 3. 5. 8. 3. 1. 4
5. 9. 4. 3. 7. 0. 7. 7. 4. 1.
5. 6. 1. 7. 8. 5. 3. 8. 1. 9.
0. 9. 9. 8. 7. 5. 2. 7. 9. 6.
5. 1. 6. 7. 3. 0. 3. 3. 6. 9
5. 4. 9. 3. 2. 5. 7. 2. 9. 1.
0. 1. 1. 2. 3.

10がたくさんできます。
前半と後半に分けて加えると

周期（P）は60です。

条件（mod）を変化させると

mod＝2　　P＝3
0. 1. 1. 0. 1

mod＝3　　P＝8
0. 1. 1. 2. 0. 2. 2. 1. 0. 1

mod＝4　　P＝6
0. 1. 1. 2. 3. 1. 0. 1

mod＝5　　P＝20
0. 1. 1. 2. 3. 0. 3. 3. 1. 4.
0. 4. 4. 3. 2. 0. 2. 2. 4. 1.
0. 1

mod＝6　　P＝24
0. 1. 1. 2. 3. 5. 2. 1. 3. 4
1. 5. 0. 5. 5. 4. 3. 1. 4. 5.
3. 2. 5. 1. 0. 1

mod＝7　　P＝16
0. 1. 1. 2. 3. 5. 1. 6. 0. 6.
6. 5. 4. 2. 6. 1. 0. 1

mod＝8　　P＝12
0. 1. 1. 2. 3. 5. 0. 5. 5. 2.
7. 1. 0. 1.

mod＝9　　P＝24
0. 1. 1. 2. 3. 5. 8. 4. 3. 7.
1. 8. 0. 8. 8. 7. 6. 4. 1. 5.
6. 2. 8. 1. 0. 1

mod＝10　　P＝60

mod と p の表からわかることは?

mod		p	
2		3	
3		8	
4	= 2×2	6	= 3×2
5		20	
6	= 2×3	24	= 3×8
7		16	
8	= 2×2×2	12	= 3×2×2
9	= 3×3	24	= 8×3
10	= 2×5	60	= 3×20

mod = 21 の場合は?

mod = 21 = 3 × 7

p = ? $\quad 8,\ 16$

0、1、1、2、3、5、8、13

0、13、13、5、18、2、20、1

0、1

p = 16 (8と16の最小公倍数になる。)

mod = 16 の場合は?

mod = 16 = 2 × 2 × 2 × 2

p = ? $\quad$ 3 $\quad$ 2 $\quad$ 2 $\quad$ 2

0、1、1、2、3、5、8、13、5、2

7、9、0、9、9、2、11、13、8、5

13、2、15、1、0、1

p = 24 = 3×2×2×2

(mod = 2^4 $\quad$ p = 3×2^3)

解説

1÷Nの循環節の長さを予測する方法で

① Nを素数に分解する。

② 最小公倍数の規則性を使う。

③ 定数倍の規則性を使う。

という方法があります。

1÷Nのあまりは限らずNよりも小さいということが重要なことです。

前2つの数を加えて、条件より大きくなったら、その数を引く場合がもっとも単純な場合です。このことより予測できることは、どのような計算であっても、ある条件の数より大きくなったらその数を引けるだけ引いて、ある条件の数より小さい数にする場合、①、②③が使えるのではないかということです。