2005.2

1

〔テーマ〕

江戸期の循環小数の研究 より

長崎和算研究会の 米光 丁 さんの研究を参考にしました。米光さんは第7代久留米藩主 有馬 頼徸公(1714-1783)の書かれた「拾璣算法」の現代解と解説の本を兵庫県の藤井 康生さんと協力して、1999年8月に出版されています。

問題12（現代語訳）

分子が 9510202489

分母が 2843460249201

の分数は循環小数で、

小数の最後は ……96311で 循環の桁数

は大変大きい。

例えば 分子が1 で 分母が7は

循環小数で、 $0.\dot{1}4285\dot{7}\,142857$

となり 6桁で繰り返す。

このように考えるとこの分数の循環小数は

何桁で繰り返すのか。

「拾璣算法（現代解と解説）」（P.11）

解き方

まず分母を素因数分解します。

$2843460249201 = 13 \times 23 \times 11^5 \times 9^5$

$1 \div 13 = 0.\dot{0}7692\dot{3}$ 6桁

$1 \div 23 = 0.\dot{0}434782608695652173913\dot{3}$ 22桁

$1 \div 11 = 0.\dot{0}\dot{9}$

11^5 より 2×11^4 2×11^4桁

$1 \div 9 = 0.\dot{1}$

9^5 より 1×9^4 9^4桁

分母を素因数分解し、それぞれの循環節の長さを調べます。

11^5、9^5 のように同じ数をかけあわす場合は、2つ目からは、その数をかけます。

11^2 は 2×11、11^3 は 2×11^2

(定数倍の規則性)

$6、22、2\times 11^4、9^4$

の最小公倍数を求めます。

2)	6	22	2×11^4	9^4
3)	3	11	11^4	9^4
11)	1	11	11^4	$9^3\times 3$
	1	1	11^3	$9^3\times 3$

$2\times 3^2\times 11^4\times 9^3 = 192119202$

$$\frac{9510202489}{2843460249201}$$

は 192 119 202 桁の数字をくり返します。

このようにして、答を求めています。

山路主住さんの研究より

山路主住(1704-1772)さんは、割り算を何人かで分担して計算する方法をみつけました。大きな循環小数を研究する上で、重要な役割をはたしたと思います。

1÷343 の計算に応用してみます。

1÷343 = 0.0029154
(① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦)

5桁目の時のあまりを求めます。

$291 \times 343 = 99813$　　$1000 - 813 = 187$

6桁目からは　187÷343 になります。

$187^2 = 34969 = 101 \times 343 + 326$

326は 10桁目の時のあまりです。

11桁目からは 326÷343 になります。

$326^2 = 106276 = 309 \times 343 + 289$

21桁目からは 289÷343 になります。

$289^2 = 83521 = 243 \times 343 + 172$

41桁目からは $172 \div 343$ になります。

$172^2 = 29584 = 86 \times 343 + 86$

81桁目からは $86 \div 343$ になります。

31桁目からの場合は、10桁目の時のあまりと20桁目の時のあまりを使います。

$326 \times 289 = 94214 = 274 \times 343 + 232$

$232 \div 343$ になります。

$1 \div 343 = 1 \div 7^3$ より循環節の長さは、

$6 \times 7 \times 7 = 294$（桁）と予想できます。

$294 \div 2 = 147$（桁） まず前半を求めます。

前半のあまりが $343 - 1 = 342$ なると、

後半の計算が簡単になるからです。

12桁の電卓を使用しました。

1 ÷ 343 =

1	(1)	0.0029154518
11	(326)	95 04 37 31 77
21	(289)	84 25 65 59 76
31	(232)	6763848396
41	(172)	50 145 77 259
51	(163)	47 521 86 588
61	(316)	92 128 27 988
71	(116)	33 819 24 198
81	(86)	25 072 88 629
91	(253)	73 760 93 294
101	(158)	46 064 13 994
111	(58)	16 90962099
121	(43)	12 53644314
131	(298)	86 88046647
141	(29)	23 03206997

141 桁目からは　2 3 0 3 2 0 6 9 9 7
(147)

147 桁目の時のあまりを求めます。

3206×343＝1099658

1000－658＝342＝343－1

前半のあまりが 343－1 となったので、

後半は、前半の数値の 9の不足分になります。

1 →　0 0 2 9 1 5 4 5 1 8

148 →　9 9 7 0 8 4 5 4 8 1

294 桁を 7等分して加えると、

1÷49 の循環節がつくれます。

さらに 7等分して加えると

1÷7 の循環節がつくれます。

26	$0.0\dot{3}8461\dot{5}$
27	$0.\dot{0}3\dot{7}$
28	$0.03\dot{5}7142\dot{8}$
29	$0.\dot{0}34482758620689655172413793\dot{1}$
30	$0.0\dot{3}$
31	$0.\dot{0}3225806451612\dot{9}$
32	0.03125
33	$0.\dot{0}\dot{3}$
34	$0.0\dot{2}94117647058823\dot{5}$
35	$0.0\dot{2}8571\dot{4}$
36	$0.02\dot{7}$
37	$0.\dot{0}2\dot{7}$
38	$0.0\dot{2}6315789473684210\dot{5}$
39	$0.\dot{0}2564\dot{1}$
40	0.025
41	$0.\dot{0}243\dot{9}$
42	$0.0\dot{2}3809\dot{5}$
43	$0.\dot{0}2325581395348837209\dot{3}$
44	$0.02\dot{2}\dot{7}$
45	$0.0\dot{2}$
46	$0.0\dot{2}17391304347826086956\dot{5}$
47	$0.\dot{0}21276595744680851063829787234042553191489361\dot{7}$
48	$0.0208\dot{3}$

N^6-1 が 7で割り切れることを確かめる実験

$2^6-1 = 63 = 7 \times 9$ (001001)

$3^6-1 = 728 = 7 \times 104$ (010212)

$4^6-1 = 4095 = 7 \times 585$ (021021)

$5^6-1 = 15624 = 7 \times 2232$ (032412)

$6^6-1 = 46655 = 7 \times 6665$ (050505)

$8^6-1 = 262143 = 7 \times 37449$ (111111)

$9^6-1 = 531440 = 7 \times 75920$ (125125)

$10^6-1 = 999999 = 7 \times 142857$ (142857)

$11^6-1 = 1771560 = 7 \times 253080$ (163163)

$12^6-1 = 2985983 = 7 \times 426569$ (1 8 6 10 3 5)

$13^6-1 = 4826808 = 7 \times 689544$ (1 11 1 11 1 11)

フェルマーの小定理

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$ pは素数とする

実験の説明

フェルマーさんは、10進法以外の何進法であっても成立する規則性を発見しました。

$10^6-1 = 7 \times 142857$

これは10進法の場合です。

和算と西洋数学のちがいをあげろと言われた時、10進法に対する接し方だと思います。

インド → 中国 → 日本

インド → アラビア → ヨーロッパ

これが、地理的条件なのでしょうか。

異なる文化をとりこむ勇気の大切さを感じます。

「勇あるかな勇あるかな勇あらずして
何をもっておこなわんや」
細井平洲（1728−1801）

1÷N（Nは1から48）の表

1	1
2	0.5
3	$0.\dot{3}$
4	0.25
5	0.2
6	$0.1\dot{6}$
7	$0.\dot{1}4285\dot{7}$
8	0.125
9	$0.\dot{1}$
10	0.1
11	$0.\dot{0}\dot{9}$
12	$0.08\dot{3}$
13	$0.\dot{0}7692\dot{3}$
14	$0.0\dot{7}1428\dot{5}$
15	$0.0\dot{6}$
16	0.0625
17	$0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$
18	$0.0\dot{5}$
19	$0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$
20	0.05
21	$0.\dot{0}4761\dot{9}$
22	$0.0\dot{4}\dot{5}$
23	$0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$
24	$0.041\dot{6}$
25	0.4

なぜNを素因数分解するのか？

1÷N（Nは合成数）の循環小数を使って

$1 \div 7 = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

$1 \div 17 = 0.\dot{0}588235\ 294117 64\dot{7}$

$1 \div 19 = 0.\dot{0}526315\ 78947368 42\dot{1}$

$7 \times 17 = 119$

$1 \div 119 = 0.\dot{0}0840\ 33613\ 44537\ 815126050$

$42016\ 80672\ 26890\ 75630252\dot{1}$

$7 \times 19 = 133$

$1 \div 133 = 0.\dot{0}07518796992481 20\dot{3}$

1÷119 の循環小数を等分して加えると

2等分　42857 142857 142857 1428571

3等分　88235 29411 764705

4等分　857142 857142

6等分　99999999

8等分　714285

12等分　9999

1÷133 の循環小数を等分して加えると

2等分　　999 999 999

3等分　　285714

17×19 = 323

1÷323 = 0.$\dot{0}$030959752 3219814241

486068111455108359 13

31269349845 20 1238 390

09 2879256965944272 44

58204334365325077399

38080495356037151702

7863 777089783281733 7

461$\dot{3}$

1÷323 の循環小数を等分して加えると

2等分　(947368421052631578)×4

3等分　(588235294117647 0)×3

4等分

6等分

8等分

9等分

をたしかめて下さい。

$1 \div 41 = 0.\dot{0}243\dot{9}$

$7 \times 41 = 287$

$1 \div 287 = 0.\dot{0}03484 \quad 320557$

$491289 \quad 198606$

$27177\dot{7}$

1÷287の循環小数を等分して加えると

2等分　(29268)×3　　43902÷29268=1.5

3等分　(43902)×2

5等分　285714

6等分　87804　　87804÷29268=3

解説（その1）

1÷7 が循環小数になる理由

```
              0.1 4 2 8 5 7
          7 ) 1
             -0
              1
×10           1 0
             -  7
                3
×10             3 0
               -2 8
                  2
×10               2 0
                 -1 4
                    6
×10                 6 0
                   -5 6
                      4
×10                   4 0
                     -3 5
                        5
×10                     5 0
                       -4 9
                          1
```

あまりは 1→3→2→6→4→5→1

を繰り返す。

解説（その２）

最小公倍数の規則性の例

$1 \div 7 = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ 　　6 桁

$1 \div 13 = 0.\dot{0}7692\dot{3}$ 　　6 桁

$7 \times 13 = 91$

$1 \div 91 = 0.\dot{0}1098\dot{9}$ 　　6 桁

$1 \div 17 =$ 　　16 桁

$1 \div 19 =$ 　　18 桁

$17 \times 19 = 323$

$1 \div 323 =$ 　　$16 \times 18 \div 2 = 144$

144 桁

解説（その3）

定数倍の規則性の例

$1 \div 7 =$ 　　6桁

$1 \div 7^2 = 1 \div 49 =$ 　　$6 \times 7 = 42$ 桁

$1 \div 7^3 = 1 \div 343 =$ 　　$6 \times 7 \times 7 = 294$ 桁

（例外）

① 10進法で $1 \div 3$, $1 \div 3^2$ はともに 1 桁

② 10進法で $1 \div 487$, $1 \div 487^2$ はともに486桁

名城大学の北岡良之さんの研究によります。

③ 7進法で $1 \div 5$, $1 \div 5^2$ はともに 4 桁

M進法で $1 \div N$, $1 \div N^2$ が同じ桁数になる場合

$M^2 + 1 = B \times N^2$ 　　4桁

$M^2 - 1 = B \times N^2$ 　　2桁

（Bは自然数）

$\frac{M}{N}$ は $\sqrt{B}$ の近似分数です。

簡単な実験 （その１） 最小公倍数について

前２つの数を加えます。 10より大きくなったら10を引きます。

5+8=13、13−10=3

0、1、1、2、3、5、8、3、1、4、

5、9、4、3、7、0 7 7 4 1

5 6 1 7 8 5 3 8 1 9

0 9 9 8 7 5 2 7 9 6

5 1 6 7 3 0 3 3 6 9

5 4 9 3 2 5 7 2 9 1

0 1

前半と後半に分けて加えると10がたくさんできます。

mod = 10 P = 60

0、1、1、0、1 mod = 2 P = 3

0、1 1、2、3、0、3、3、1 4

0、4 4 3、2 0、2、2、4 1

0、1 mod = 5 P = 20

mod について 10 = 2×5

P について 60 = 3×20

簡単な実験（その2）定数倍について

0、1、1、0、1　　$mod = 2$　$P = 3$

0、1、1、2、3、1、0、1　$mod = 4$　$P = 6$

0、1、1、2、3、5

0、5、5、2、7、1、0、1　$mod = 8$　$P = 12$

modは $8 = 2^3$　　Pは $12 = 3 \times 2 \times 2$

（発展問題）

0、0、1、□

0、0、1、□

0、0、1、□

と変化させてたしかめて下さい。

mod=10で □ が25になったら、10を2回引いて下さい。□は10より小さい5になります。