

2005.2

[テーマ]

江戸期の循環小数の研究より

長崎和算研究会の米光 丁さんの研究を参考にしました。米光さんは第7代久留米藩主 有馬 頼僮公(1714-1783)の書かれた「拾璣算法」の現代解と解説の本を兵庫県 of 藤井 康生さんと協力して、1999年8月に出版されています。

問題12 (現代語訳)

分子が 9510202489

分母が 2843460249201

の分数は循環小数で、

小数の最後は …… 96311 で循環の桁数は大変大きい。

例えば 分子が 1 で分母が 7 は

循環小数で、 $0.\dot{1}4285\dot{7}$ 142857

となり 6 桁で繰り返す。

このように考えるとこの分数の循環小数は何桁で繰り返すのか。

「拾遺算法 (現代解と解説)」(P. 11)

解き方

まず分母を素因数分解します。

$$2843460249201 = 13 \times 23 \times 11^5 \times 9^5$$

$$1 \div 13 = 0.\dot{0}7692\dot{3} \quad 6 \text{ 桁}$$

$$1 \div 23 = 0.\dot{0}4347826086 \quad 22 \text{ 桁}$$

$$956521739\dot{1}\dot{3}$$

$$1 \div 11 = 0.\dot{0}\dot{9}$$

$$11^5 \text{ より } 2 \times 11^4 \quad 2 \times 11^4 \text{ 桁}$$

$$1 \div 9 = 0.\dot{1}$$

$$9^5 \text{ より } 1 \times 9^4 \quad 9^4 \text{ 桁}$$

分母を素因数分解し、それぞれの循環節の長さを調べます。

11^5 、 9^5 のように同じ数をかけあわす場合は、2つ目からは、その数をかけます。

$$11^2 \text{ は } 2 \times 11 \quad , \quad 11^3 \text{ は } 2 \times 11^2$$

(定数倍の規則性)

$$6, 22, 2 \times 11^4, 9^4$$

の最小公倍数を求めます。

$$2 \) \ 6 \ 22 \ 2 \times 11^4 \ 9^4$$

$$3 \) \ 3 \ 11 \ 11^4 \ 9^4$$

$$11 \) \ 1 \ 11 \ 11^4 \ 9^3 \times 3$$

$$1 \ 1 \ 11^3 \ 9^3 \times 3$$

$$2 \times 3^2 \times 11^4 \times 9^3 = 192119202$$

$$\underline{9510202489}$$

$$2843460249201$$

は 192 119 202 桁の数字をくり返します。

このようにして、答を求めています。

山路主任さんの研究より

山路主任 (1704-1772)さんは、割り算を何人かで分担して計算する方法を見つけました。大きな循環小数を研究する上で、重要な役割をはたしたと思います。

$1 \div 343$ の計算に応用してみます。

$$1 \div 343 = 0.0029154$$

①②③④⑤⑥⑦

5桁目の時のあまりを求めます。

$$291 \times 343 = 99813 \quad 1000 - 813 = 187$$

6桁目からは $187 \div 343$ になります。

$$187^2 = 34969 = 101 \times 343 + 326$$

326は10桁目の時のあまりです。

11桁目からは $326 \div 343$ になります。

$$326^2 = 106276 = 309 \times 343 + 289$$

21桁目からは $289 \div 343$ になります。

$$289^2 = 83521 = 243 \times 343 + 172$$

41 桁目からは $172 \div 343$ になります。

$$172^2 = 29584 = 86 \times 343 + 86$$

81 桁目からは $86 \div 343$ になります。

31 桁目からの場合は、10 桁目の時のあまりと 20 桁目の時のあまりを使います。

$$326 \times 289 = 94214 = 274 \times 343 + 232$$

$232 \div 343$ になります。

$1 \div 343 = 1 \div 7^3$ より循環節の長さは、

$6 \times 7 \times 7 = 294$ (桁) と予想できます。

$294 \div 2 = 147$ (桁) まで前半を求めます。

前半のあまりが $343 - 1 = 342$ になると、

後半の計算が簡単になるからです。

12 桁の電卓を使用しました。

$$1 \div 343 =$$

1	(1)	0.0029154518
11	(326)	9504373177
21	(289)	8425655976
31	(232)	6763848396
41	(172)	5014577259
51	(163)	4752186588
61	(316)	9212827988
71	(116)	3381924198
81	(86)	2507288629
91	(253)	7376093294
101	(158)	4606413994
111	(58)	1690962099
121	(43)	1253644314
131	(298)	8688046647
141	(29)	2303206997

141 桁目からは 2 3 0 3 2 0 6 9 9 7
 \uparrow (147)

147 桁目の時のあまりを求めます。

$$3206 \times 343 = 1099658$$

$$1000 - 658 = 342 = 343 - 1$$

前半のあまりが $343 - 1$ となったので、

後半は、前半の数値の 9 の不足分になります。

$$1 \rightarrow \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 9 \quad 15 \quad 4 \quad 5 \quad 18$$

$$148 \rightarrow \quad 9 \quad 9 \quad 7 \quad 0 \quad 8 \quad 4 \quad 5 \quad 4 \quad 8 \quad 1$$

299 桁を 7 等分して加えると、

$1 \div 49$ の循環節がつけれます。

さらに 7 等分して加えると、

$1 \div 7$ の循環節がつけれます。

- 26 0.0384615
- 27 0.037
- 28 0.03571428
- 29 0.0344827586206896551724137
93i
- 30 0.03
- 31 0.032258064516129
- 32 0.03125
- 33 0.03
- 34 0.02941176470588235
- 35 0.0285714
- 36 0.027
- 37 0.027
- 38 0.0263157894736842105
- 39 0.02564i
- 40 0.025
- 41 0.02439
- 42 0.0238095
- 43 0.023255813953488372093
- 44 0.0227
- 45 0.02
- 46 0.02173913043478260869565
- 47 0.0212765957446808510638297
872340425531914893617
- 48 0.02083

$N^6 - 1$ が 7 で割り切れる

ことを確かめる実験

$$2^6 - 1 = 63 = 7 \times 9 \quad (001001)$$

$$3^6 - 1 = 728 = 7 \times 104 \quad (010212)$$

$$4^6 - 1 = 4095 = 7 \times 585 \quad (021021)$$

$$5^6 - 1 = 15624 = 7 \times 2232 \quad (032412)$$

$$6^6 - 1 = 46655 = 7 \times 6665 \quad (050505)$$

$$8^6 - 1 = 262143 = 7 \times 37449 \quad (111111)$$

$$9^6 - 1 = 531440 = 7 \times 75920 \quad (125125)$$

$$10^6 - 1 = 999999 = 7 \times 142857 \quad (142857)$$

$$11^6 - 1 = 1771560 = 7 \times 253080 \quad (163163)$$

$$12^6 - 1 = 2985983 = 7 \times 426569 \quad (186035)$$

$$13^6 - 1 = 4826808 = 7 \times 689544 \quad (101010)$$

フェルマーの小定理

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad p \text{ は素数と仮定}$$

実験の説明

フェルマーさんは、10進法以外の何進法
であっても成立する規則性を発見しました。

$$10^6 - 1 = 7 \times 142857$$

これは10進法の場合です。

和算と西洋数学のちがいをあげろと言わ
れた時、10進法に対する接し方だと思っ
ます。

インド → 中国 → 日本

インド → アラビア → ヨーロッパ

これが、地理的条件なのではないか。

異なる文化をとりこむ勇気の大切さを感じます。

「勇あるかな勇あるかな勇あらずして

何をもっておこなわんや」

細井孚洲 (1728-1801)

1 ÷ N (Nは1から48)の表

1	1
2	0.5
3	0. $\dot{3}$
4	0.25
5	0.2
6	0.1 $\dot{6}$
7	0.14285 $\dot{7}$
8	0.125
9	0. $\dot{1}$
10	0.1
11	0.0 $\dot{9}$
12	0.08 $\dot{3}$
13	0.07692 $\dot{3}$
14	0.071428 $\dot{5}$
15	0.0 $\dot{6}$
16	0.0625
17	0.058823529411764 $\dot{7}$
18	0.0 $\dot{5}$
19	0.05263157894736842 $\dot{1}$
20	0.05
21	0.04761 $\dot{9}$
22	0.04 $\dot{5}$
23	0.043478260869565217391 $\dot{3}$
24	0.041 $\dot{6}$
25	0.4

なぜ N を素因数分解するのか?

9

$1 \div N$ (N は合成数) の循環小数を使って

$$1 \div 7 = 0.\dot{1}42857$$

$$1 \div 17 = 0.\dot{0}588235294117647$$

$$1 \div 19 = 0.\dot{0}52631578947368421$$

$$7 \times 17 = 119$$

$$1 \div 119 = 0.\dot{0}08403361344537815126050$$

$$420168067226890756302521$$

$$7 \times 19 = 133$$

$$1 \div 133 = 0.\dot{0}07518796992481203$$

$1 \div 119$ の循環小数を等分して加える

2等分 $428571428571428571428571428571$

3等分 8823529411764705

4等分 857142857142

6等分 99999999

8等分 714285

12等分 9999

$1 \div 133$ の循環小数を等分して加えると

2等分 999 999 999

3等分 285714

$$17 \times 19 = 323$$

$$1 \div 323 = 0.\dot{0}0309597523219814241$$

48606811145510835913

31269349845201238390

09287925696594427244

58204334365325077399

38080495356037151702

78637770897832817337

461\dot{3}

$1 \div 323$ の循環小数を等分して加えると

2等分 $(947368421052631578) \times 4$

3等分 $(5882352941176470) \times 3$

4等分

6等分

8等分

9等分

をわしかめて下さい。

$$1 \div 41 = 0.\dot{0}2439$$

$$17 \times 41 = 287$$

$$1 \div 287 = 0.\dot{0}03489 \quad 320557$$

$$491289 \quad 198606$$

$$271777$$

1 ÷ 287 の循環小数を等分して加えると

2等分 $(29268) \times 3 \quad 43902 \div 29268 = 1.5$

3等分 $(43902) \times 2$

5等分 285714

6等分 $87804 \quad 87804 \div 29268 = 3$

解説 (その1)

1 ÷ 7 が循環小数になる理由

$$\begin{array}{r}
 0.142857 \\
 7 \overline{) 1} \\
 \underline{- 0} \\
 1 \\
 \times 10 \quad \underline{10} \\
 \underline{- 7} \\
 3 \\
 \times 10 \quad \underline{30} \\
 \underline{- 28} \\
 2 \\
 \times 10 \quad \underline{20} \\
 \underline{- 14} \\
 6 \\
 \times 10 \quad \underline{60} \\
 \underline{- 56} \\
 4 \\
 \times 10 \quad \underline{40} \\
 \underline{- 35} \\
 5 \\
 \times 10 \quad \underline{50} \\
 \underline{- 49} \\
 1
 \end{array}$$

あまりは、1 → 3 → 2 → 6 → 4 → 5 → 1

を繰り返す。

解説 (その2)

最小公倍数の規則性の例

$$1 \div 7 = 0.\dot{1}4285\dot{7} \quad 6 \text{ 桁}$$

$$1 \div 13 = 0.\dot{0}7692\dot{3} \quad 6 \text{ 桁}$$

$$7 \times 13 = 91$$

$$1 \div 91 = 0.\dot{0}1098\dot{9} \quad 6 \text{ 桁}$$

$$1 \div 17 = \quad 16 \text{ 桁}$$

$$1 \div 19 = \quad 18 \text{ 桁}$$

$$17 \times 19 = 323$$

$$1 \div 323 =$$

$$16 \times 18 \div 2 = 144$$

$$144 \text{ 桁}$$

解説 (その3)

定数倍の規則性の例

$$1 \div 7 = \quad \quad \quad 6 \text{ 桁}$$

$$1 \div 7^2 = 1 \div 49 = \quad \quad \quad 6 \times 7 = 42 \text{ 桁}$$

$$1 \div 7^3 = 1 \div 343 = \quad \quad \quad 6 \times 7 \times 7 = 294 \text{ 桁}$$

(例外)

① 10進法で $1 \div 3$, $1 \div 3^2$ はともに 1 桁

② 10進法で $1 \div 487$, $1 \div 487^2$ はともに 486 桁
名城大学の北岡良之さんの研究によります。

③ 7進法で $1 \div 5$, $1 \div 5^2$ はともに 4 桁

M進法で $1 \div N$, $1 \div N^2$ が同じ桁数になる場合

$$M^2 + 1 = B \times N^2 \quad \quad \quad 4 \text{ 桁}$$

$$M^2 - 1 = B \times N^2 \quad \quad \quad 2 \text{ 桁}$$

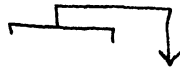
(B は自然数)

$\frac{M}{N}$ は \sqrt{B} の近似分数です。

簡単な実験 (その1) 最小公倍数について

前2つの数を加えます。

10より大きくなったら10を引きます。



$$5 + 8 = 13, 13 - 10 = 3$$

0. 1. 1. 2. 3. 5. 8. 3. 1. 4.

5. 9. 4. 3. 7. 0. 7. 7. 4. 1

5. 6. 1. 7. 8. 5. 3. 8. 1. 9

0. 9. 9. 8. 7. 5. 2. 7. 9. 6

5. 1. 6. 7. 3. 0. 3. 3. 6. 9

5. 4. 9. 3. 2. 5. 7. 2. 9. 1

0. 1. mod = 10 P = 60

0. 1. 1. 0. 1. mod = 2 P = 3

0. 1. 1. 2. 3. 0. 3. 3. 1. 4

0. 4. 4. 3. 2. 0. 2. 2. 4. 1

0. 1. mod = 5 P = 20

mod 10 について $10 = 2 \times 5$

P について $60 = 3 \times 20$

前半と後半を
分けて加えると
10が太くさん
できます。

簡単な実験 (その2) 定数倍について

0. 1. 1. 0. 1 $\text{mod} = 2$ $P = 3$

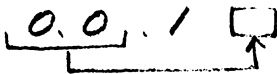
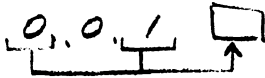
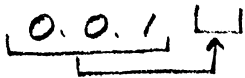
0. 1. 1. 2. 3. 1. 0. 1 $\text{mod} = 4$ $P = 6$

0. 1. 1. 2. 3. 5

0. 5. 5. 2. 7. 1. 0. 1 $\text{mod} = 8$ $P = 12$

mod は $8 = 2^3$ P は $12 = 3 \times 2 \times 2$

(発展問題)



と変化させてたしかめて下さい。

$\text{mod} = 10$ で \square が 25 になったら、10 を 2 回

引いて下さい。 \square は 10 より小さい 5 になり

ます。