平方根のテイラー展開の第三項について

林　邦英

一、一〇進法の発明

古代インドで０（ゼロ）が発明され、数の表し方がとても便利になりました。一、二、三、四、五、六、七、八、九と０（ゼロ）の十種類の数字だけで、どれだけ大きな数でも表すことができます。なぜ一〇なのかといえば、人間の両手の数（ゆびの）が一〇本であることに理由はあるのでしょう。

二、一〇進法のひろがり

インドから、東へ向かって、中国を経由して、日本に一〇進法は伝わってきました。インドから西へは、アラビアを経由して、ヨーロッパへ伝わりました。

三、テイラー展開について

一七世紀のヨーロッパでニュートンさんとライプニッツさんによって、微分積分法が創られました。中でもテイラー展開はとてもすぐれた考え方

平方根のテイラー展開の式　　式①

$$\sqrt{A^2+B} = A + \underbrace{\frac{B}{2A}}_{\text{第2項}} - \underbrace{\frac{B^2}{(2A)^3}}_{\text{第3項}} + \cdots$$

だと思います。テイラーさんはイギリスの数学者です。平方根についていえば、テイラーさんより前から、知られていました。ニュートンさんは、平方根のテイラー展開の係数を、パスカル三角数を研究することで求めています。

パスカル三角数

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

四、七世紀のインドの数学

十七世紀から、さらに、千年前のインドですでに平方根の計算において、式①の第三項までの計算式が求められていました。どのようにして、これを発見したのでしょうか。私は一〇進法を利用した数値分析だと考えています。一から一〇〇までの平方数の表の観察です。

五、式①を使った計算例

十七の平方根を求めます。十七は十六に一を加えたものです。十六は四に四をかけたものです。式①のAに四を代入し、Bに一を代入します。四に八分の一を加え、五一二分の一を引きます。四に五一二分の六三を加えたものになります。小数で表すと、四．一二三〇四六八……になります。平方すると、一六．九九九五一四……になります。十七の平方根よりも少し小さいですが、かなり精度のよい数値です。十七の平方根の真数は、四．一二三一〇五六……です。くらべてみてください。

六、平方数の表の分析　第二項について

一四の平方は一九六、九九の平方は九八〇一です。これを使って二の平方根を求めると精度のちがう二つの数値をえることができます。この差を分析することで式①の第二項を求めることができます。

七、平方数の表の分析第三項について五一の平方数は二六〇一、五二の平方数は二七〇四、五三の平方数は二八〇九です。この数値を使って二六、二七、二八の平方根の近似値を求めます。二六は二五に一を加えたもの、二七は二五に二を加えたものです。二五の平方根は五です。五を二倍すると一〇になります。式①の第二項を見てください。

Aの前に係数二がついています一〇は、一〇進法において、位どりとして表れます。電卓を使って、二五より少し大きい数の平方根を求めました。マイナス一、マイナス四、マイナス九がみえてきました。あとは位取りに注意すれば、式①の第三項を求めることが出来ます。

51^2＝２６０１を使って$\sqrt{26}$を求める計算

5、1^2＝２６．０１

$$\sqrt{5.1^2-0.01}=5.1-\frac{0.01}{2\times5.1}=5.1-\frac{0.01}{10.2}$$

$$=5.1-\frac{1}{1020}\quad=5.1-0.0009803\cdots$$

$$=5.0990197\cdots\cdots$$

２５より少し大きい数の平方根の表

２６	５、０９９０１９
２７	５、１９６１５２
２８	５、２９１５０２
２５、１	５、００９９９０
２５、２	５、０１９９６０
２５、３	５、０２９９１０

八、千年の年月

人類の歴史にとって、千年は長いのでしようかそれとも短いのでしょうか。歴史はいつも右上がりではなく、衰退したり、途絶えたりします。

九、江戸時代の円周率の数値について

円周率は約三．一四です。江戸の前期には三．一六と三．一四が使われていました。一七二〇年以降は三．一六ばかりになりました。明らかに精度は悪くなっています。一七二〇年に何がおきたのでしょうか。

十、まとめ

私は近代ヨーロッパの数学はギリシャの流れにインドの流れを取り込むことで成立したのではないかと考えています。同時代の日本はどうだったでしょうか。数学、理科ばなれが新聞記事によくのります。江戸時代と現代とはずいぶんと違い、いっしょくたに考えることはもちろんできません。しかし、そこに共通する何かを追求することは歴史を学ぶ上で重要なテーマだと考えています。

（参考にしたもの）
①林隆夫さんのインド数学の研究
②E・マオールさんの「不思議な数eの物語」（岩波書店）
③中村邦光さんの江戸期の研究